Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Merlin Carl
Sommersemester 2018

Übungsblatt 3 zur Vorlesung 'Reell abgeschlossene Körper und schwache Arithmetik'

Aufgabe 1: Die Goldbachsche Vermutung besagt, dass jede gerade Zahl > 2 die Summe von zwei Primzahlen ist.

(a) Existiert ein Turingprogramm P derart, dass P für jede natürliche Zahl n bei Eingabe von n genau dann mit Ausgabe 1 hält, wenn unterhalb von n ein Gegenbeispiel zur Goldbachschen Vermutung existiert und sonst mit Ausgabe 0?

(b) Existiert ein Turingprogramm P derart, dass P für jede natürliche Zahl n bei Eingabe von n genau dann mit Ausgabe 1 hält, wenn oberhalb von n ein Gegenbeispiel zur Goldbachschen Vermutung existiert und sonst mit Ausgabe 0?

(c) Existiert ein Turingprogramm P derart, dass P auf der leeren Eingabe genau dann hält, wenn die Goldbachsche Vermutung falsch ist?

(d) Die Primzahlzwillingsvermutung besagt, dass es unendlich viele Paare (p, q) von Primzahlen mit Abstand 2 gibt, wie etwa $(3, 5)$ oder $(29, 31)$. Kann man mit der Idee aus (c) auch zeigen, dass ein Turingprogramm P existiert, das auf der leeren Eingabe genau dann hält, wenn die Primzahlzwillingsvermutung falsch ist?

Aufgabe 2: Es sei $\mathscr{N} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$. Zeige, dass eine elementare Einbettung $j : \mathbb{N} \to \mathscr{N}$ existiert.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien $\mathscr{L} = \{<\}$ die Sprache und T die Theorie der linearen Ordnungen. Finde ein Beispiel für einen $\mathscr{L}$-Satz ϕ so, dass keine quantorenfreie Formel ψ derart existiert, dass $T \models \phi \leftrightarrow \psi$ oder zeige, dass ein solcher Satz nicht existiert.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.