Merlin Carl

Übungsblatt 4 zur Vorlesung 'Reell abgeschlossene Körper und schwache Arithmetik'

Aufgabe 1: Es sei $\mathscr{L}$ eine endliche Sprache und T eine $\mathscr{L}$-Theorie, die keine endlichen Modelle besitzt. Zeige: Besitzt T (bis auf Isomorphie) nur ein abzählbare Modell, so ist T vollständig.

Aufgabe 2: Es sei $\mathscr{L}$ eine Sprache, T eine $\mathscr{L}$-Theorie und $\mathscr{A} \models T_\forall$ eine $\mathscr{L}$-Struktur.

(a) Angenommen, $\text{Diag}(\mathscr{A}) + T$ ist unerfüllbar. Zeige: Dann existiert eine endliche Teilmenge $\Delta = \{\psi_1(\vec{d}), ..., \psi_n(\vec{d})\} \subseteq \text{Diag}(\mathscr{A})$ so, dass $T \models \neg \bigwedge_{i=1}^n \psi_i(\vec{d})$, wobei $\vec{d} = (d_1, ..., d_m)$ die in Δ vorkommenden neuen Konstantenzeichen für Elemente von $\mathscr{A}$ ist.

(b) Folgere aus (a): Ist $\text{Diag}(\mathscr{A}) + T$ unerfüllbar, so ist $\forall v_1, ..., v_m \neg \bigwedge_{i=1}^n \psi_i(\vec{v}) \in T_\forall$.

(c) Leite aus (b) und $\mathscr{A} \models T_\forall + \bigwedge_{i=1}^n \psi_i(\vec{d})$ einen Widerspruch her. Folgere, dass $\text{Diag}(\mathscr{A}) + T$ erfüllbar ist.

(d) Zeige nun: Es existiert eine $\mathscr{L}$-Struktur $\mathscr{M}$ so, dass $\mathscr{A}$ Substruktur von $\mathscr{M}$ ist und so, dass $\mathscr{M} \models T$.

(e) Zeige umgekehrt: Ist $\mathscr{M} \models T$ und ist $\mathscr{A}$ eine Substruktur von $\mathscr{M}$, so ist $\mathscr{A} \models T_\forall$.

Insgesamt haben wir also gezeigt: Eine beliebige $\mathscr{L}$-Struktur $\mathscr{A}$ ist genau dann zu einem Modell $\mathscr{M}$ von T erweiterbar, wenn $\mathscr{A} \models T_\forall$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei DLOE die (aus der Vorlesung bekannte) Theorie der dichten linearen Ordnungen mit der zusätzlichen Bedingung 'ohne Endpunkte', d.h. $\forall x \exists y (y > x)$ und $\forall x \exists y (y < x)$.

(a) Zeige: Sind $(L_0, <_0)$ und $(L_1, <_1)$ Modelle von DLOE $X := \{x_0, ..., x_n\} \subseteq L_0$, $a \in L_0$ beliebig und ist $f : X \to L_1$ eine ordungserhaltende Abbildung (d.h. $x <_0 x'$ impliziert $f(x) <_1 f(x')$ für alle $x, x' \in X$), so existiert ein $b \in L_1$ derart, dass die durch

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ b & x = a \end{cases}$$

definierte Abbildung $f' : X \cup \{a\} \to L_1$ ebenfalls ordnungserhaltend ist.

(b) Zeige durch iterierte Anwendung von (a): Je zwei abzählbare dichte lineare Ordnungen sind isomorph. Folgere, dass DLOE vollständig ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.