

---

Übungsblatt 5 zur Vorlesung ‘Reell abgeschlossene Körper und schwache  
Arithmetik’

---

**Aufgabe 1:** Es sei  $\mathcal{L}_{\text{or}} := \{+, \cdot, 0, 1, <\}$  die Sprache der geordneten Ringe.

(a) Zeige: Ist  $\phi(x)$  eine quantorenfreie  $\mathcal{L}_{\text{or}}$ -Formel in der freien Variablen  $x$ , so ist  $\{z \in \mathbb{Z} : \mathbb{Z} \models \phi(z)\}$  eine Vereinigung endlich vieler (eigentlicher und uneigentlicher) abgeschlossener Intervalle in  $\mathbb{Z}$ .<sup>12</sup>

(b) Zeige, dass  $\text{Th}(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1, <)$  keine Quantorenelimination erlaubt.

**Aufgabe 2:** Es sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache und  $T$  eine  $\mathcal{L}$ -Theorie. Wir erweitern nun  $\mathcal{L}$  um ein  $n$ -stelliges Relationszeichen  $R_\phi$  für jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\phi(v_1, \dots, v_n)$  mit  $n$  freien Variablen; die neue Sprache nennen wir  $\mathcal{L}'$ . Ferner sei  $T' := T \cup \{\forall v_1, \dots, v_n (R_\phi(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \dots, v_n))\}$ .

(a) Zeige, dass die  $\mathcal{L}'$ -Theorie  $T'$  Quantorenelimination erlaubt.<sup>3</sup>

(b) Folgere: Zu jeder Sprache  $\mathcal{L}$  und jeder  $\mathcal{L}$ -Theorie  $T$  existieren eine Spracherweiterung  $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$  und eine Theorieerweiterung  $T' \supseteq T$  so, dass die  $\mathcal{L}'$ -Theorie  $T'$  Quantorenelimination erlaubt.

**Zusatzaufgabe für Interessierte:** Entscheide mit Beweis, ob  $\text{Th}(\mathbb{Z}, \cdot)$  Quantorenelimination erlaubt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.

---

<sup>1</sup>Ein eigentliches Intervall ist von der Form  $[m, n] := \{z \in \mathbb{Z} : m \leq z \leq n\}$ ; ein ‘uneigentliches Intervall’ ist von der Form  $(-\infty, m] := \{z \in \mathbb{Z} : z \leq m\}$  oder  $[m, \infty) := \{z \in \mathbb{Z} : z \geq m\}$ .

<sup>2</sup>Tipp: Induktion über den Formelaufbau. Wie sehen die atomaren Formeln aus?

<sup>3</sup>Beachte, dass zu den  $\mathcal{L}'$ -Formeln auch solche Formeln gehören, in denen die neuen Relationssymbole  $R_\phi$  vorkommen!