Universität Konstanz Merlin Carl
Fachbereich Mathematik und Statistik Sommersemester 2018

Übungsblatt 6 zur Vorlesung 'Reell abgeschlossene Körper und schwache Arithmetik'

Aufgabe 1:
(a) Zeige: Ist $X \subseteq \mathbb{Z}$ eine (mit den üblichen Interpretationen der auftretenden Zeichen) in der Sprache $\mathscr{L}^* = \{+, -, 0, 1, <\} \cup \{P_k : k \in \mathbb{N}^{\geq 2}\}$ definierbare Teilmenge von $\mathbb{Z}$, so ist X 'unrein periodisch', d.h. es existieren $A, B \in \mathbb{Z}$ mit $B > 0$ so, dass für alle $z > A$ gilt: $(z \in X) \leftrightarrow ((z + B) \in X)$.[1]
(b) Zeige, dass die Menge $\{z^2 : z \in \mathbb{Z}\}$ sowie die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen keine $\mathscr{L}^*$-definierbaren Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind.

Aufgabe 2: (Induktion in Pr) Zeige: Für jede $\mathscr{L}^*$-Formel $\phi(x, \vec{w})$ ist folgender Satz, genannt Ind(ϕ), in Pr beweisbar:

$$\forall \vec{p}[(\phi(0, \vec{p}) \wedge (\forall y \geq 0(\phi(y, \vec{p}) \to \phi(y + 1, \vec{p}))) \to \forall x \geq 0 \phi(x, \vec{p})]$$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Zeige: Ist $\mathscr{M} \models$ Pr abzählbar, so ist $(M, <)$ entweder zu $(\mathbb{Z}, <)$ oder zu $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <_{\text{lex}})$ isomorph (wobei $<_{\text{lex}}$ die lexikalische Ordnung ist).[2]

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.

In der Übung:

Zu A1:
(1) daraus folgt, das multiplikation in Pr nicht definierbar ist: also es gibt keine $\mathscr{L}^*$-formel $\phi(x, y, z, \vec{w})$, $\vec{p} \in \mathbb{Z}$ so, dass $\mathbb{Z} \models \phi(a, b, c, \vec{p})$ genau dann, wenn $a \cdot b = c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
(2) das gleiche gilt auch in die andere richtung: also für $z < B$ ist $z \in X$ gdw. $z - A \in X$. endliche teilmengen gehen natürlich immer. also sind genau die 'beidseitig unrein periodischen' teilmengen von $\mathbb{Z}$ definierbar.

Zu A2:

Zu Zusatz:

[1] Tipp: Quantorenelimination und Induktion über den Formelaufbau!
[2] Es hilft, das Ergebnis der Zusatzaufgabe von Blatt 4 zu verwenden, dass $(\mathbb{Q}, <)$ bis auf Isomorphie die einzige abzählbare dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte ist.

(1) Allgemein: Ordnungstypen von Pr-Nichtstandardmodellen sind von der Form $(D \times \mathbb{Z}, <_{\text{lex}})$, wobei D eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte.

(2) Es funktioniert z.B. auch $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

(3) Es funktioniert aber z.B. nicht $(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}$. denn sind $(a, 0) < (b, 0)$ aus der $\mathbb{Q}$-Komponente, $(c, 0)$ aus der $\mathbb{R}$-komponente, $s := (c - a)$, so müsste (a, b) zu $(c, c + s)$ ordnungsisomorph sein (via $x \mapsto x + s$), aber das eine intervall ist abzählbar und das andere nicht. Allgemein: Die Ordnung muss ausserdem homogen sein, d.h. je zwei Intervalle gleicher Länge sind ordnungsisomorph.