
Übungsblatt 7 zur Vorlesung ‘Reell abgeschlossene Körper und schwache
Arithmetik’

Aufgabe 1: (Effektive Quantorenelimination für RCFs) Zeige: Es existiert ein Turing-Programm P so, dass P bei Eingabe einer \mathcal{L}_{or} -Formel ϕ nach endlicher Zeit anhält und eine quantorenfreie Formel ψ mit $\text{RCF} \models \forall \vec{x}(\phi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x}))$ ausgibt.

Aufgabe 2: Es sei R ein reell abgeschlossener Körper.

- (a) Zeige, dass auf R durch $b < a \Leftrightarrow \exists x(x^2 = b - a)$ eine Ordnung definiert ist.
- (b) Zeige, dass die in (a) definierte Ordnung die einzige Ordnung auf R ist.

Aufgabe 3:¹ Es sei R ein reell abgeschlossener Körper, $a, b, c \in R$, $p \in R[X]$ mit $a < b < c$ und $p(b) = 0$. Ferner sei b die einzige Nullstelle von p im Intervall $[a, c]$. Wie üblich bezeichne p' die (formale) Ableitung des Polynoms p .

Wir sagen, dass p bei b das Vorzeichen wechselt, wenn in R ein $\varepsilon > 0$ so existiert, dass $p(b - \delta)p(b + \delta) < 0$ für alle $0 < \delta < \varepsilon$.

(a) Zeige: Wenn p bei b nicht das Vorzeichen wechselt, so ist b eine mehrfache Nullstelle von p und insbesondere eine gemeinsame Nullstelle von p und p' .²

(b) Zeige: Ist p' auf $[a, c]$ überall strikt positiv, so wechselt p in $[a, c]$ genau einmal das Vorzeichen, und zwar bei b .

(c) Zeige: Ist p' überall auf dem Intervall $[a, c]$ strikt positiv, so wechselt p bei b das Vorzeichen von $-$ zu $+$.³

(d) Zeige nun: Ist p' überall auf dem Intervall $[a, c]$ strikt positiv, so ist p dort monoton wachsend.⁴

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $\phi(x)$ eine quantorenfreie \mathcal{L}_{or} -Formel der Länge n (als Zeichenfolge). Zeige: Die durch ϕ definierte Teilmenge von \mathbb{R} ist eine Vereinigung von höchstens n (eentlichen oder uneentlichen) Intervallen.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.

¹In der folgenden Aufgabe sollen nur Aussagen verwendet werden, die bis einschließlich Dienstag in der Vorlesung bewiesen wurden, also z.B. die Charakterisierungen reell abgeschlossener Körper über die Zwischenwerteigenschaft, aber keine Aussagen, die mithilfe des Beweisziels dieser Aufgabe bewiesen wurden.

²Tipp: Zerlege p über R in irreduzible Faktoren und zeige zunächst, dass ein irreduzibles Polynom vom Grad > 1 in R nicht das Vorzeichen wechseln kann.

³Zeige dazu zunächst, dass zu jedem $\varepsilon \in R^{>0}$ ein $\delta \in R^{>0}$ so existiert, dass $|\frac{p(b+\delta')-p(b)}{\delta'} - p'(b)| < \varepsilon$ und $|\frac{p(b)-p(b-\delta')}{\delta'} - p'(b)| < \varepsilon$ für alle $\delta' \in (0, \delta)$. Setze dann $\varepsilon = \frac{|p'(b)|}{3}$.

⁴Tipp: Nimm für einen Widerspruch an, es gäbe $u, v \in (a, c)$ mit $u < v$ und $p(u) > p(v)$. Betrachte das Polynom $p - \frac{p(u)+p(v)}{2}$.