Universität Konstanz — Merlin Carl
Fachbereich Mathematik und Statistik — Sommersemester 2018

Übungsblatt 8 zur Vorlesung 'Reell abgeschlossene Körper und schwache Arithmetik'

Aufgabe 1: Es sei M ein Nichtstandardmodell von PA, ϕ eine $\mathscr{L}_{\text{or}}$-Formel. Zeige: Existiert zu jedem Nichtstandardelement $x \in M$ ein Nichtstandardelement $y \in M$ mit $M \models y < x$ und $M \models \phi(y)$, so existiert ein Standardelement $n \in M$ mit $M \models \phi(n)$.

Aufgabe 2: Zeige auf Basis der Axiome der Peano-Arithmetik: $\forall a, b(a \neq 0 \rightarrow a^2 \neq 2b^2)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass kein Modell von PA den Ordnungstyp $\mathbb{N}+\mathbb{Z}\mathbb{R}$ haben kann. Sei dazu M solch ein Nichtstandardmodell und $c \in M$ ein Nichtstandardelement. Für $x \in M$ nichtstandard bezeichnen wir mit $[x]_{\mathbb{Z}}$ die $\mathbb{Z}$-Komponente von x, d.h. $\{x+z : z \in \mathbb{Z}\}$. Wir setzen $[x]_{\mathbb{Z}} < [y]_{\mathbb{Z}}$ gdw. $x+z < y$ für alle $z \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein Ordnungsisomorphismus $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \{[x]_{\mathbb{Z}} : x \in M\}$. Für $i \in \mathbb{N}$ setzen wir $c \cdot i := \underbrace{c + ... + c}_{i\times}$.

(a) Zeige: Für $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$ ist $[c \cdot i]_{\mathbb{Z}} < [c \cdot j]_{\mathbb{Z}}$.

(b) Zeige: $[c^2]_{\mathbb{Z}} > [c \cdot i]_{\mathbb{Z}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Folgere, dass $(\pi^{-1}([c \cdot i]_{\mathbb{Z}}) : i \in \mathbb{N})$ eine streng monoton wachsende, beschränkte Folge reeller Zahlen ist.

(c) Es sei nun $s \in \mathbb{R}$ das Supremum dieser Folge, $d \in \pi(s)$. Zeige: Es ist $cx > s$ für alle Nichtstandardelement x von M. Folgere, dass ein Standardelement n von M existiert mit $c \cdot n > s$.

(d) Leite aus (c) einen Widerspruch her. Folgere, dass kein Modell von PA den Ordnungstyp $\mathbb{N} + \mathbb{Z}\mathbb{R}$ haben kann.

(e) Zeige, dass ein Modell von Pr mit Ordnungstyp $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ existiert.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.