Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Merlin Carl
Sommersemester 2018

Übungsblatt 9 zur Vorlesung 'Reell abgeschlossene Körper und schwache Arithmetik'

Aufgabe 1: Es sei $\mathscr{N} \models \mathrm{PA}$ nichtstandard, $a \in \mathscr{N}$ nichtstandard, $I := \{x \in \mathscr{N} : \exists n \in \mathbb{N} x < \underbrace{a + ... + a}_{n\times}\}$. Ferner sei für $k \in \mathbb{N}$ die Menge $P_k \subseteq I$ definiert durch $\{x \in I : \mathscr{N} \models \exists y \underbrace{y + ... + y}_{k\times} = x\}$.

(a) Zeige: $(I, +, 0, 1, <, (P_j : j \in \mathbb{N})) \models \mathrm{Pr}$.
(b) Zeige: $(I, +, \cdot, 0, 1, <) \not\models \mathrm{I}\Delta_0$.

Aufgabe 2: Es sei $\mathscr{M} \models \mathrm{IOpen}$ nichtstandard, $\vec{p} \in \mathscr{M}$ und ϕ eine quantorenfreie $\mathscr{L}_{\mathrm{or}}$-Formel so, dass $\mathscr{M} \models \phi(n, \vec{p})$ für alle Standardelemente n von $\mathscr{M}$. Zeige: Es existiert ein Nichtstandardelement $a \in \mathscr{M}$ mit $\mathscr{M} \models \phi(a, \vec{p})$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Zeige, dass keine $\mathscr{L}_{\mathrm{or}}$-Formel ϕ mit folgender Eigenschaft existiert: Für jedes $\mathscr{M} \models \mathrm{IOpen}$ ist $\{x \in \mathscr{M} : \mathscr{M} \models \phi(x)\}$ der Standardteil von $\mathscr{M}$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.