Universität Konstanz Merlin Carl
Fachbereich Mathematik und Statistik Sommersemester 2018

Übungsblatt 11 zur Vorlesung 'Reell abgeschlossene Körper und schwache Arithmetik'

Aufgabe 1: Es sei K ein RCF. Zwei Elemente $x, y \in K$ heißen 'archimedisch äquivalent', geschrieben $x \sim y$, falls ein $n \in \mathbb{N}$ so existiert, dass $|x| < n|y|$ und $|y| < n|x|$.

(a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf K ist.

Wir ordnen die $\sim$-Klassen nun durch $[x]_\sim < [y]_\sim$ gdw. $n|x| < |y|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige: Auf $K^\times / \sim$ ist die durch $<$ gegebene lineare Ordnung entweder einelementig oder eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte.

(c) Bestimme den Ordnungstyp von $<$ für $K = \mathbb{R}\langle\langle x \rangle\rangle$.

(d) Zeige: Es existiert ein RCF R mit einer überabzählbaren Folge $(a_\iota : \iota < \omega_1)$ von unendlichen Elementen derart, dass $a_\iota > a_\xi^2$ für alle $\xi < \iota < \omega_1$.

(e) Folgere: Es existiert ein RCF R, der keinen IP haben kann, der zu keiner Substruktur eines IPs von $\mathbb{R}\langle\langle x \rangle\rangle$ isomorph ist.

Aufgabe 2: Zeige: Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mathscr{M} \models \text{IOpen}$, in dem die Gleichung $\Sigma_{i=1}^k x_k^n = y^m$ eine Lösung $(x_1, ..., x_k, y) \in (M \setminus \{0\})^{(k+1)}$ hat.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Für eine $\mathscr{L}_{\text{or}}$-Formel $\phi(x, y, \vec{z})$ ist $\text{Bij}_\phi(u, v, \vec{z})$ die Formel

$$\forall x < u \exists! y < v \phi(x, y, \vec{z}) \wedge \forall y < v \exists! x < u \phi(x, y, \vec{z}),$$

die also ausdrückt, dass die durch ϕ im Parameter $\vec{z}$ definierte Menge

$$\{(x, y) : x < u \wedge y < v \wedge \phi(x, y, \vec{z})\}$$

eine Bijektion zwischen der Menge der Elemente $< u$ und der Menge der Elemente $< v$ definiert.

Das 'arithmetische Schubfachprinzip' (ASFP) ist die Formelmenge

$$\{\forall u, v, \vec{z}(u < v \rightarrow \neg \text{Bij}_\phi(u, v, \vec{z})) : \phi \text{ eine } \mathscr{L}_{\text{or}}\text{-Formel}\}.$$

Zeige: IOpen$\not\models$ASFP.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.