Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Merlin Carl
Sommersemester 2018

Übungsblatt 12 zur Vorlesung 'Reell abgeschlossene Körper und schwache Arithmetik'

Aufgabe 1: Es seien k ein RCF, G eine angeordnete divisible Gruppe, $s, t \in k((x))^G$. Zeige: $\mathrm{Supp}(s \cdot t)$ ist wohlfundiert, d.h. $s \cdot t \in k((x))^G$.

Aufgabe 2: Es sei K ein RCF, $A \subseteq K$ ein konvexer Teilring, ferner $I := \{x \in A : \forall a \in A |a||x| < 1\}$. Zeige: I ist ein maximales Ideal von A, d.h. A/I ist ein Körper.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $p \in \mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]$ ein homogenes Polynom (d.h. eine Summe von Termen der Form $q\Pi_{i=1}^{n} X_i^{e_i}$, wobei $q \in \mathbb{Q}$ und $\Sigma_{i=1}^{n} e_i$ für alle Summanden denselben Wert hat). Angenommen, es existiert $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, ..., 0)\}$ mit $p(x_1, ..., x_n) = 0$. Zeige: Es existiert ein $\mathscr{M} \models \mathrm{IOpen}$ und $(p_1, ..., p_n) \in \mathscr{M}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ sowie $q_1, ..., q_n \in -\mathscr{M} \cup \mathscr{M}$ so, dass $p(\frac{p_1}{q_1}, ..., \frac{p_n}{q_n}) = 0$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.