



Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2013
10.07.2013
Zettel 11

Übungen zur Rekursionstheorie

Aufgabe 1: Für $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sei $A \otimes B := \{p(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Zeigen Sie:
Ist $B \neq \emptyset$, so ist $A \leq_m A \otimes B$.

Aufgabe 2: Es sei $K := \{x \mid x \in W_x\}$. Zeigen, Sie, dass K auf die folgenden Mengen m -reduzierbar ist:

- a) $\{x \mid \phi_x(x) = 0\}$
- b) $\{x \mid x \in E_x\}$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass folgende Mengen zum gleichen m -Grad gehören:

- (1) $\{x \mid \phi_x = \mathbf{0}\}$
- (2) $\{x \mid \phi_x \text{ total und konstant}\}$
- (3) $\{x \mid W_x \text{ unendlich}\}$

Aufgabe 4:

- a) Es sei a ein m -Grad. Zeigen Sie: a ist abzählbar.
- b) Zeigen Sie: Es gibt überabzählbar viele m -Grade.
- c) Zeigen Sie: Es gibt höchstens abzählbar viele rekursiv aufzählbare m -Grade.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $T \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie: Es existiert kein Programm P derart, dass für alle $x \in \mathbb{N}$ die Berechnung $P(x)$ nach höchstens $T - 5$ Schritten stoppt und so, dass $P(x) \downarrow = 1$ falls $P_x(0) \downarrow$ in $\leq T$ Schritten und $P_x(0) \downarrow = 0$, sonst. (7 Punkte)
(Faßt man T als die maximale Zeitspanne auf, die man auf ein Ergebnis zu warten bereit ist, so ist es also nicht möglich, in weniger als T Schritten herauszufinden, ob das Ergebnis in vertretbarer Zeit vorliegen wird.)
- (b) Zeigen Sie: Es existiert $C \in \mathbb{N}$ so, dass ein Programm Q existiert mit $Q(x) \downarrow$ nach höchstens $C T x^C$ Schritten für alle x und so, dass $Q(x) \downarrow = 1$ falls $P_x(0) \downarrow$ in $\leq T$ Schritten und $Q(x) \downarrow = 0$, sonst. (3 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe am 17.07.2013 in der Vorlesung oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.