Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2013
24.04.2013
Zettel 2

# Übungen zur Rekursionstheorie

**Aufgabe 1**:
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $URM$-berechenbar sind:
a) $f_1(x, y) = x^y$ (4 Punkte)
b) $f_2(x, y) = |x - y|$ (3 Punkte)
c) $sg(x)$, wobei $sg(0) = 0$ und $sg(x) = 1$, falls $x \neq 0$. (3 Punkte)

**Aufgabe 2**: (Subroutinen)
Es sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Ein $URM+f$-Programm ist ein Programm, das neben den $URM$-Befehlen auch den Befehl $F(i_1, ..., i_k, j)$ enthalten darf. Durch Anwendung von $F$ ändert sich der Programmzustand von $(z, (r_i)_{i\in})$ in $(z+1, (r'_i)_{i\in\omega})$, wobei $r'_j = f(r_{i_1}, ..., r_{i_k})$ und $r'_k = r_k$ für $k \neq j$. Eine Funktion $g : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ heiße $URM + f$-berechenbar, falls es ein $URM + f$-Programm gibt, das $g$ berechnet.
(a) Zeige: Ist $f$ $URM$-berechenbar, so sind die $URM$-berechenbaren Funktionen gerade die $URM + f$-berechenbaren Funktionen. (7 Punkte)
(b) Zeige: Sind die $URM$-berechenbaren Funktionen gerade die $URM + f$-berechenbaren Funktionen, so ist $f$ $URM$-berechenbar. (3 Punkte)

**Aufgabe 3**:
a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Überlegen Sie sich eine geeignete Darstellung des Problems und zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator für von Polynomen vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{N}$ $URM$-berechenbar ist. (4 Punkte)
b) Überlegen Sie sich eine geeignete Darstellung des Problems und zeigen Sie, dass Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von rationalen Zahlen $URM$-berechenbar sind. (6 Punkte)

**Bemerkung**: In beiden Aufgaben dürfen Sie die $URM$-Berechenbarkeit von Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf den natürlichen Zahlen voraussetzen.

**Aufgabe 4**:
Es sei $J'(m,n,k)$ eine Variante des Sprungoperators, die auf einem Programmzustand $(z,(r_1,r_2,...))$ wie folgt operiert: Ist $r_m < r_n$, so ist der nächste Zustand $(k,(r_1,r_2,...))$, andernfalls $(z+1,(r_1,r_2,...))$. Programme, die aus arithmetischen Befehlen und $J'$ bestehen (aber kein $J$ enthalten), nennen wir $URM'$-Programme, entsprechend heißt eine Funktion $URM'$-berechenbar, falls es ein $URM'$-Programm gibt, das sie berechnet. Zeigen Sie: Die Menge der $URM$-berechenbaren Funktionen und die Menge der $URM'$-berechenbaren Funktionen sind gleich.

**Zusatzaufgabe für Interessierte**:
Es sei $P$ ein $URM$-Programm, $n \in \mathbb{N}$. Ist die Berechnung $P(n)$ endlich mit Länge $l(P,n) \in \mathbb{N}$, so nennen wir $l(P,n)$ die Laufzeit von $P$ bei Eingabe $n$.
a) Zeigen Sie: Es existiert ein $URM$-Programm $P$ derart, dass $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \downarrow$, aber für jedes Polynom $p \in \mathbb{Z}[X]$ gilt $\exists m \in \mathbb{N} \forall k > m l(P,m) > p(m)$.
b) Zeigen Sie: Es existiert eine $URM$-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass für jedes $URM$-Programm $P$, welches $f$ berechnet, gilt:
Ist $p \in \mathbb{Z}[X]$, so existiert $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $l(P,k) > p(k)$ für alle $k > m$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 02.05.2013 in der Übungsgruppe oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.