



Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2013
08.05.2013
Zettel 3

Übungen zur Rekursionstheorie

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie direkt (d.h. ohne die Äquivalenz mit *URM*-Berechenbarkeit zu verwenden), dass folgende Funktionen partiell-rekursiv sind:

(1) χ_{prim} , wobei $\chi_{prim}(n) = 1$ falls n eine Primzahl ist, und $\chi_{prim}(n) = 0$ sonst. (2 Punkte)

(2) $g(n) = d$, wobei d der kleinste Primteiler von n ist. (2 Punkte)

(3) $\phi(n)$, die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen unterhalb von n . (2 Punkte)

b) Welche der Funktionen (1)-(3) sind primitiv-rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $J'_{u,v,w} : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch $J'_{u,v,w}(i, r_1, \dots, r_n) = w$ falls $r_u < r_v$ und $J'_{u,v,w}(i, r_1, \dots, r_n) = i + 1$, sonst. Zeigen Sie: J' ist primitiv-rekursiv.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie: $p(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$ definiert eine berechenbare Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und \mathbb{N} .

b) Es sei p wie in Teil a), ferner seien für $n \in \mathbb{N}$ nun $\pi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $\pi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $p(\pi_1(n), \pi_2(n)) = n$. Zeigen Sie: π_1 und π_2 sind berechenbar.

Aufgabe 4:

Es sei \mathfrak{P} die Menge der Polynome mit Koeffizienten in \mathbb{N} . Überlegen Sie sich eine geeignete Darstellung des Problems und zeigen Sie: Die Abbildung $f : \mathfrak{P} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, gegeben durch $f(P, n) = P(n)$, ist berechenbar.

Zusatzaufgabe für Interessierte:

Ersetzen Sie in den URM-Grundbefehlen den Sprungoperator J durch den Sprungoperator J^0 , wobei $J^0(m, k)$ einen Sprung in Zeile k ausführt, wenn der Inhalt des m -ten Registers gleich 0 ist, und andernfalls zur nächsten Programmzeile übergegangen wird. Ist jede URM -berechenbare Funktion auch noch berechenbar unter Verwendung von J^0 , aber ohne Verwendung von J ?

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 15.05.2013 in der Übungsgruppe oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.