Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2013
15.05.2013
Zettel 4

Übungen zur Rekursionstheorie

Aufgabe 1:
Geben Sie ein Turing-Programm T an derart, dass T mit initialer Bandbelegung $(\underbrace{1,1,1,...,1}_{m},0,\underbrace{1,1,...,1}_{n},0,0,...)$ nach endlicher Zeit mit Bandbelegung $(\underbrace{1,1,,...,1}_{mn},0,0,...)$ stoppt.

Aufgabe 2:
Wir codieren einen Zustand der Turingberechnung mit Turingprogramm P durch ein Tripel $\tau = (z, i, s) \in \mathbb{N}^3$, wobei z der innere Zustand, i die Position des Schreib-Lesekopfes und s das unter dem Lesekopf befindliche Symbol angibt. Zeigen Sie: Es existieren primitiv-rekursive Funktionen Z_P und I_P derart, dass für alle bei der Berechnung von P auftretenden τ gilt: $Z_P(\tau)$ und $I_P(\tau)$ sind der nächste innere Zustand bzw. die nächste Position des Lesekopfes nach τ in der Ausführung von P.

Aufgabe 3:
a) Die Goldbachsche Vermutung ist die Behauptung, dass jede gerade natürliche Zahl sich als Summe von höchstens zwei Primzahlen schreiben läßt. Zeigen Sie: Es existiert ein URM-Programm Q derart, dass $Q(0,0,...)\downarrow= 1$, falls die Goldbachsche Vermutung falsch ist, und andernfalls $Q(0,0,...)\uparrow$. (6 Punkte)
b) Ein Primzahlzwilling ist ein Paar von Primzahlen mit Abstand 2, wie z.B. $(3,5)$, $(17,19)$ oder $(29,31)$. Eine große offene Vermutung der Zahlentheorie ist die Primzahlzwillingsvermutung, die besagt, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Was passiert, wenn man die Strategie von a) anwendet, um ein entsprechendes Programm für die Primzahlzwillingsvermutung zu erhalten? (4 Punkte)

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: Es existiert eine natürliche Zahl n derart, dass jede URM-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch ein URM-Programm berechnet werden kann, das höchstens n Register verwendet.
(**Bemerkung**: Es läßt sich sogar zeigen, dass hierfür $n = 3$ Register ausreichen.)

Zusatzaufgabe für Interessierte:
Eine reelle Zahl $x \in [0, 1]$ heiße berechenbar, falls eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ existiert mit $\Sigma_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^i f(i) = x$. Es sei R die Menge der berechenbaren Zahlen. Zeigen Sie: R hat das Lebesgue-Maß 0.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 22.05.2013 in der Vorlesung oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.