Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2013
22.05.2013
Zettel 5

Übungen zur Rekursionstheorie

Aufgabe 1:
Es sei e die Eulersche Konstante, ferner $f_e : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ die Funktion, die jedes $i \in \mathbb{N}$ auf die i-te Dezimalziffer von e abbildet. Zeigen Sie unter Annahme der Church-Turing-These: f_e ist URM-berechenbar.

Aufgabe 2:
Es seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ effektiv berechenbare Funktionen. Zeigen Sie unter Annahme der Church-Turing-These: Die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in dom(f) \cap dom(g) \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist URM-berechenbar.

Aufgabe 3: Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt: Zu $n \in \mathbb{N}$ sei M_n die Menge aller URM-Programme, die höchstens n Zeilen enthalten und keine anderen Register als $R_1, ..., R_n$ verwenden. Offenbar ist M_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich. Nun setzen wir für $k \in \mathbb{N}$:

$$h(k) = max\{m | \exists P \in M_k(P(k) \downarrow= m)\}$$

Prüfen Sie nun das folgende Argument, das unter Verwendung der Church-Turing-These zeigen soll, dass h berechenbar ist. Ist es stichhaltig? Begründen Sie Ihre Antwort: Skizzieren Sie ein Ablaufdiagramm zur Berechnung von h oder zeigen Sie auf, wo das Argument fehlerhaft ist.

> Um $h(k)$ für ein gewisses $k \in \mathbb{N}$ zu berechnen, lasse man einfach alle der endlich vielen Programme in M_k gleichzeitig mit Input k laufen. Nach endlicher Zeit erhählt man alle Ausgaben von Programmen aus dieser Menge mit Input k. Von diesen berechnet man das Maximum und gibt es aus.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: Ist $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total, ferner P ein URM-Programm so, dass

$$\lambda(\{x \in [0,1] | \forall i \in \mathbb{N} P^x(i) \downarrow = g(i)\}) > 0,$$

so ist g rekursiv. ($\lambda(X)$ bezeichnet hier das Lebesgue-Maß von X.)

Zusatzaufgabe für Interessierte:
Es sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt definiert: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $g(n)$ die größte Zahl, die von mindestens einem URM-Programm P, das höchstens n Zeilen enthält, mit Input n als Output ausgegeben wird.
a) Beweisen oder widerlegen Sie: g ist total. (2 Punkte)
b) Zeigen Sie: g ist nicht URM-berechenbar. (8 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 29.05.2013 in der Vorlesung oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.