Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2013
05.06.2013
Zettel 7

Übungen zur Rekursionstheorie

Aufgabe 1: Beweisen Sie ohne Verwendung der Church-Turing-These:
a) Die Ersetzungsfunktion für endliche Folgen, definiert durch
$E(\tau(x_1, ..., x_k), i, y) = \tau(y_1, ..., y_k)$ mit $y_i = y$ und $y_j = x_j$ für $j \neq i$ ist berechenbar.
b) Die Auslesefunktion für endliche Folgen, definiert durch
$A(\tau(x_1, ..., x_k), i) = x_i$, falls $1 \leq i \leq k$ und 0 sonst ist berechenbar.
Die Berechenbarkeit von Addition, Multiplikation, Exponentiation etc. kann dabei ohne weiteres angenommen werden.

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gegeben durch $f(n) = \phi_n(1)$ für $1 \in W_n$ und $f(n)$ undefiniert sonst, ist berechenbar.
b) Zeigen Sie: Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $g(n) = \phi_n(n)$ für $n \in W_n$ und $g(n)$ undefiniert sonst, ist berechenbar.

Aufgabe 3: Es sei $n \geq 1$. Beweisen Sie die Existenz einer total berechenbaren Funktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass

$$W_{s(x)}^{(n)} = \{(y_1, ..., y_n) | \Sigma_{i=1}^{n} y_i = x\}$$

Aufgabe 4:
Beweisen Sie, dass die in der Vorlesung definierten Funktionen $NextReg : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und $NextLine : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv sind.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
Eine Funktion $F : [0, 1] \to [0, 1]$ heiße berechenbar, falls ein $URMO$-Programm P existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $i \in \mathbb{N}$ gilt: $P^x(i) \downarrow= [F(x)]_i$, wobei $[z]_i$ für $z \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ die i-te Nachkommastelle der Dezimaldarstellung von z bezeichnet.
Zeigen Sie: Jede berechenbare Funktion $F : [0, 1] \to [0, 1]$ ist gleichmäßig stetig.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 12.06.2013 in der Vorlesung oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.