Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2013
12.06.2013
Zettel 8

Übungen zur Rekursionstheorie

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die folgenden Prädikate nicht entscheidbar sind:
(a) $x \in E_x$.
(b) E_x hat unendlich viele Elemente.
(c) ϕ_x ist total und konstant.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass keine berechenbare Funktion $f(x, y)$ derart existiert, dass $P_x(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ entweder in höchstens $f(x, y)$ Schritten oder überhaupt nicht stoppt.

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Es existiert eine berechenbare Funktion $rec : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ so, dass für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt: $\phi^{(2)}_{rec(i,j)}$ ist die Funktion, die aus $\phi^{(1)}_i$ und $\phi^{(3)}_j$ durch Rekursion entsteht. (D.h. es ist $\phi^{(2)}_{rec(i,j)}(x, 0) = \phi^{(1)}_i(x)$ und $\phi^{(2)}_{rec(i,j)}(x, k + 1) = \phi^{(3)}_j(x, k, \phi_{s(i,j)}(x, k))$.)

Aufgabe 4: Sei $C \in \mathbb{N}$. Eine C-beschränkte Registermaschine ($C-BRM$) ist eine URM, deren Registerinhalte nach oben durch C beschränkt sind: Wird bei der Ausführung eines Programms P mit Input $x_1, ..., x_n \in \{0, 1, ..., C\}$ auf einer C-beschränkten Registermaschine der Befehl $S(i)$ angewandt, während $r_i = C$ ist, so ist $P(x_1, ..., x_n) \uparrow$. Ist die Berechnung $P(x_1, ..., x_n)$ auf einer C-beschränkten Registermaschine definiert, so schreiben wir $P(x_1, ..., x_n) \downarrow_C$, andernfalls $P(x_1, ..., x_n) \uparrow_C$. Beweisen oder widerlegen Sie:
a) Es existiert ein URM-Programm H derart, dass $H(C, i, x) \downarrow= 1$, falls $P_i(x) \downarrow_C$ und $H(C, i, x) \downarrow= 0$, sonst.
b) Es existiert zu jedem $C \in \mathbb{N}$ ein $C' \in \mathbb{N}$ so, dass das Halteproblem für C-beschränkte Registermaschinenprogramm mit Index $\leq C$ auf C'-beschränkten Registermaschinen lösbar ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
Auf dem beiliegenden Blatt finden Sie ein Gedicht, das einen Beweis für die Unlösbarkeit des Halteproblems beschreibt. Stellen Sie diesen Beweis mathematisch stichhaltig dar.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 19.06.2013 in der Vorlesung oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.