Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2013
19.06.2013
Zettel 9

Übungen zur Rekursionstheorie

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass folgende Mengen partiell entscheidbar sind:
a) $\{x|\phi_x(1) = 1\}$
b) $\{n|\exists x, y, z, a \in \mathbb{N}(a^n = x^n + y^n + z^n)\}$
c) $\{n|\exists p \in \mathbb{N}(p \text{ ist prim und } p + 2 \text{ ist prim und } p > n)\}$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Mengen sind rekursiv? Welche rekursiv aufzählbar? Welche besitzen ein rekursiv aufzählbares Komplement?
a) $\{x|x \in E_x\}$
b) $\{x|\phi_x \text{ ist injektiv}\}$
c) $\{x|\text{In der Dezimaldarstellung von } \pi \text{ kommen mindestens } x \text{ gleiche Ziffern hintereinander}\}$

Aufgabe 3: Es sei $\mathbb{K} := (K, +, \cdot, 0, 1)$ ein höchstens abzählbarer Körper. Ein Paar (A, M) von Mengen mit $A, M \subseteq \mathbb{N}^3$ heißt rekursive Darstellung von $\mathbb{K}$, falls eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to K$ derart existiert, dass $\forall m, n, k \in \mathbb{N}((m, n, k) \in A \leftrightarrow f(m) + f(n) = f(k))$, $\forall m, n, k \in \mathbb{N}((m, n, k) \in M \leftrightarrow f(m) \cdot f(n) = f(k))$ und A und M rekursiv sind. Zeigen Sie:
a) Für eine rekursive Darstellung von $\mathbb{K}$ mit zugehöriger Surjektion f sind $\{k|f(k) = 0\}$ und $\{k|f(k) = 1\}$ entscheidbar.
b) Es existiert ein Programm P mit folgender Eigenschaft: Sind $\phi_x^{(3)}$ und $\phi_y^{(3)}$ so, dass für eine rekursive Darstellung (A, M) eines Körpers $\mathbb{K}$ gerade $\phi_x^{(3)} = \chi_A$ und $\phi_y^{(3)} = \chi_M$ sind, so ist $P(x, y) \downarrow = 1$ genau dann, wenn $\mathbb{K}$ Charakteristik 2 hat. (Sind x und y nicht von dieser Art, so kann $P(x, y)$ beliebig sein.)

Aufgabe 4: Wir definieren eine rekursive Darstellung einer Gruppe G analog zu Aufgabe 3 (d.h. die Addition auf G soll nun gegeben sein durch eine rekursive Menge A von Tripeln). Beweisen oder widerlegen Sie die Existenz ein Programmes P mit folgender Eigenschaft: Ist x so, dass für eine rekursive Darstellung A einer Gruppe G gerade $\phi_x^{(3)} = \chi_A$, so gilt $P(x) \downarrow= 1$ genau dann, wenn G zyklisch ist, sonst $P(x) \downarrow= 0$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: In der Zusatzaufgabe zu Zettel 7 wurde ein Berechenbarkeitsbegriff für reellwertige Funktionen eingeführt. Wir verfeinern den Begriff jetzt, indem wir $f : [0,1] \to [0,1]$ berechenbar nennen, falls ein $URMO$-Programm P existiert, so dass $P^x(i) \downarrow= c_i$ für alle $x \in [0,1]$, wobei c_i ein Teilintervall mit rationalen Endpunkten in $[0,1]$ codiert und die Folge der durch $(c_i | i \in \mathbb{N})$ codierten Intervalle eine Cauchy-Folge bildet.
Geben Sie ein Beispiel für eine berechenbare Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ an, die nirgends differenzierbar ist, oder zeigen Sie, dass eine solche Funktion nicht existiert.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 26.06.2013 in der Vorlesung oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.