Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik Christoph Hanselka
Wintersemester 2011/2012 Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.
Zeige, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich ist.

Aufgabe 2.
Sei K ein unendlicher Körper und $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in K^n$.
Zeige, dass $f = 0$ gilt, d.h. dass f das Nullpolynom ist.
Gilt diese Aussage auch für endliche Körper?

Aufgabe 3.
Sei A ein Integritätsring.
Zeige, dass A genau dann ein Körper ist, wenn jedes Ideal von A ein Radikalideal ist.

Aufgabe 4.
Sei K ein vollkommener Körper und $C \supseteq K$ ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von K. Weiter sei $f \in K[X]\backslash\{0\}$.
Zeige, dass das von f erzeugte Ideal (f) genau dann ein Radikalideal ist, wenn f in C nur einfache Nullstellen hat.
Überlege dir ein Gegenbeispiel für den Fall, dass K nicht vollkommen ist.

Definition:
Sei X eine Menge. Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist eine Menge von Teilmengen von X, deren Mitglieder die *offenen Mengen* genannt werden und für die folgendes gilt:
(1) $X,\ \emptyset \in \mathcal{T}$.
(2) für $M \subseteq \mathcal{T}$ gilt $\bigcup M \in \mathcal{T}$.
(3) für $A, B \in \mathcal{T}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{T}$.
Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X\backslash Y$ offen ist.
Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X. In der Regel lässt man $\mathcal{T}$ in der Notation weg.
Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn X nicht die Vereinigung zweier nicht-leerer, disjunkter offenen Mengen ist, d.h. wenn gilt:

$$\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T}:\ O_1, O_2 \neq \emptyset\ \wedge\ O_1 \cup O_2 = X \Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$$

Ein topologischer Raum heißt *irreduzibel*, wenn für alle abgeschlossenen Teilmengen $X_1,\ X_2$ von X gilt:

$$X = X_1 \cup X_2 \Rightarrow X = X_1 \vee X = X_2.$$

Aufgabe 5.
Zeige, dass ein irreduzibler topologischer Raum X immer zusammenhängend ist.
Finde ein Beispiel für einen irreduziblen topologischen Raum.
Finde ein Beispiel für einen topologischen Raum, der zusammenhängend, aber nicht irreduzibel ist.

Abgabe bis Montag, den 31. Oktober 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.