Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.
Seien $\ell_1, \dots, \ell_s \in K[X_1, \dots, X_n]$ linear, das heißt vom Grad ≤ 1. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) $V(\ell_1, \dots, \ell_n) \cap K^n = \emptyset$

(b) $V(\ell_1, \dots, \ell_n) = \emptyset$

(c) Es gibt $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $1 = a_1\ell_1 + \dots + a_n\ell_n$.

Finde Gegenbeispiele, die zeigen, dass man auf die Voraussetzung der Linearität der ℓ_i weder in „$(a) \Rightarrow (b)$“ noch in „$(b) \Rightarrow (c)$“ verzichten kann.
(Hinweis: Benutze *nicht* den Hilbertschen Nullstellensatz, sondern Lineare Algebra.)

Aufgabe 2.
Sei $n \geq 1$. Zeige, dass es in $K[X_1, \dots, X_n]$ unendlich viele paarweise nicht assoziierte Primelemente gibt.

Hinweis für die restlichen Aufgaben: Verwende den Hilbertschen Nullstellensatz bzw. das Zariski-Lemma.

Aufgabe 3.
Zeige, dass in einer affinen Algebra jedes Radikalideal der Schnitt von maximalen Idealen ist.

Aufgabe 4.
Sei $\mathfrak{m} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal. Zeige, dass es $f_i \in K[X_1, \dots, X_i]$ derart gibt, dass $\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_n)$ gilt.
(Hinweis: Führe Induktion nach n durch. Zeige, dass $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cap K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ wieder maximal ist. Fasse $L' := K[X_1, \dots, X_{n-1}]/\mathfrak{m}'$ als Unterkörper von $L := K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$ auf, und betrachte die Körpererweiterung $L|L'$.)

Abgabe bis Montag, den 7. November 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.