Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.
Seien $0 \leq r \leq n$ und $p_1, \ldots, p_r \in K[X_{r+1}, \ldots, X_n]$. Betrachte das Ideal

$$I := (X_1 - p_1, \ldots, X_r - p_r) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n].$$

(a) Zeige $I \cap K[X_{r+1}, \ldots, X_n] = (0)$.

(b) Zeige, dass I ein Primideal ist.

(c) Zeige, dass $V(I)$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper. Beschreibe die irreduziblen Komponenten der affinen K-Varietät

$$V := V(X^2 - YZ, XZ - X) \subseteq \mathbb{A}^3$$

Aufgabe 3.
Sei R ein kommutativer Ring. Zeige mit dem Zornschen Lemma, dass jedes Primideal von R ein minimales Primideal enthält.

Aufgabe 4.
Sei R ein Integritätsbereich, $n \geq 1$ und $A := R[X_{11}, \ldots, X_{nn}]$ der Polynomring über R in n^2 Unbestimmten X_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$. Wir definieren die Matrix

$$M := (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in A^{n \times n}.$$

Zeige, dass die Determinante $f := \det M$ in A irreduzibel ist.
(Anleitung: Führe Induktion nach n durch. Zeige, dass f linear in X_{11} ist. Nimm an, f wäre reduzibel und folgere, dass ein nach Induktionsvoraussetzung irreduzibler $(n-1)$-Minor ein Teiler von f wäre.)

Abgabe bis Montag, den 14. November 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.