Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.
In dieser Aufgabe identifizieren wir den Vektorraum der 9×9-Matrizen $\mathbb{C}^{9\times 9}$ mit $\mathbb{C}^{81}$, indem wir die Einträge der Matrix wie einen Text lesen (oben beginnend und Zeile für Zeile von links nach rechts lesend). Weiter kann man eine 9×9-Matrizen als eine 3×3-Matrix von $3{\times}3$-Matrizen, genannt *Blöcke*, auffassen. Ein *Sudoku*, ist eine $9{\times}9$-Matrix, in deren neun Zeilen, neun Spalten und neun Blöcken jeweils alle Zahlen von 1 bis 9 (genau) einmal vorkommen. Ein *Sudokurätsel* ist eine Einschränkung eines Sudoku (aufgefasst als Funktion $\{1,\ldots,9\}^2 \to \{1,\ldots,9\}$), welche genau eine Fortsetzung zu einem Sudoku hat. Siehe zum Beispiel: `http://de.wikipedia.org/wiki/Sudoku`

(a) Zeige, dass die Menge V der Sudokus eine $\mathbb{Q}$-Untervarietät von $\mathbb{A}^{81} = \mathbb{C}^{81}$ ist.

(b) Setze $n := 81$, also $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_{81})$. Bestimme 27 neunelementige Teilmengen $A_1,\ldots,A_{27}$ von $\{1,\ldots,81\}$, derart, daß für jedes beliebige Ideal $I \subseteq \mathbb{Q}[\underline{X}]$ mit $V = V(I)$ gilt
$$V = V\left(\sum_{k=1}^{27} \sum_{i,j\in A_k, i\neq j} (I \cap \mathbb{Q}[X_i,X_j])\right).$$
Im Beweis kann man den Satz über die geometrische Bedeutung von Eliminationsidealen brauchen.

(c) Informiere Dich über die Bedeutung von `ring`, `coeffs`, `groebner`, `map`, `proc`, `intvec` und `redSB` in `SINGULAR`.

(d) Erstelle in einem Texteditor eine Datei mit folgendem Inhalt, wobei die beiden Kommentare mit Inhalt zu füllen sind. Für den ersten Kommentar wurde in Teilaufgabe (b) schon Vorarbeit geleistet. Für den zweiten Kommentar, suche ein Sudokorätsel.

```
ring A = 0,(t,x(1..9)),lp;
poly p = (t-x(1))*(t-x(2))*(t-x(3))*(t-x(4))*(t-x(5))*(t-x(6))*
         (t-x(7))*(t-x(8))*(t-x(9))-
         (t-1)*(t-2)*(t-3)*(t-4)*(t-5)*(t-6)*(t-7)*(t-8)*(t-9);
matrix c = coeffs(p,t);
ideal J = (c[1..9,1]);
ideal JG = groebner(J);
ideal J2 = (JG[1],JG[2]);
```

```
ring R=0,(x(1..81)),dp;
ideal I;
map psi;
proc f(k,l,m,n,o,p,q,r,s)
{intvec v = k,l,m,n,o,p,q,r,s;
 int i,j;
 for (i=1; i<=8; i++) {for (j=i+1; j<=9; j++)
 {psi = A,0,1,2,3,4,5,6,7,x(v[i]),x(v[j]); I = I + psi(J2);}}}
/* Kommentar 1: Hier die Spielregeln in das Ideal I kodieren. */
/* Kommentar 2: Hier ein Sudoku in das Ideal I kodieren.  */
option(redSB);
groebner(I,10);
```

Löse das von Dir gewählte Sudoku mit `SINGULAR`, indem Du den Inhalt der Textdatei in `SINGULAR` einließt oder mit der Maus hineinkopierst.

(e) Fasse $J :=$ `J` als Ideal in $K[X_1, \dots, X_9]$ auf. Beschreibe $V(J) \subseteq \mathbb{A}^9$.

(f) Beschreibe das Bild von $V(J)$ unter der Projektion

$$\pi_1 \colon \mathbb{A}^9 \to \mathbb{A}, (x_1, \dots, x_9) \mapsto x_9.$$

(g) Beschreibe das Bild von $V(J)$ unter der Projektion

$$\pi_2 \colon \mathbb{A}^9 \to \mathbb{A}^2, (x_1, \dots, x_9) \mapsto (x_8, x_9).$$

(h) Begründe, warum `J2` das Eliminationsideal $J_2 = J \cap \mathbb{Q}[X_8, X_9]$ von J ist.

(i) Sei $I \subseteq \mathbb{Q}[\underline{X}]$ der Wert von `I` zum Zeitpunkt zwischen dem (von Dir richtig mit Inhalt gefüllten) ersten Kommentar und dem zweiten Kommentar. Begründe, warum $V(I) = V$ gilt.

(j) Nehme nun statt Deinem Sudokurätsel eine echte Einschränkung davon (lösche zum Beispiel eine oder alle Zeilen, die Du statt dem zweiten Kommentar eingefügt hast). Kannst Du immer noch eine Gröbnerbasis von `I` in 10 Sekunden berechnen? (Beachte, dass `groebner(I,10)` nach 10 Sekunden abbricht.)

Aufgabe 2.
Diese Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt. Eine 4×4-Matrix kann man als eine 2×2-Matrix von 2×2-Matrizen, genannt *Blöcke*, auffassen. Ein *Shidoku*, ist eine 4×4-Matrix, in deren vier Zeilen, vier Spalten und vier Blöcken jeweils alle Zahlen von 1 bis 4 (genau) einmal vorkommen. Wieviele Shidokus gibt es?

Abgabe bis Montag, den 19. Dezember 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.