Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (Berechnung des Schnitts von Idealen und von Kongruenzklassen)
Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Seien $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\underline{T} = (T_1, \dots, T_m)$ zwei Tupel, deren $n+m$ Einträge verschiedene Unbestimmte seien. Seien Ideale $I_1, \dots, I_m$ von $K[\underline{X}]$ gegeben.

(a) Zeige, dass für das Eliminationsideal $J \cap K[\underline{X}]$ des Ideals

$$J := (\{T_1 + \cdots + T_m - 1\} \cup \{T_i g \mid i \in \{1, \dots, m\}, g \in I_i\}) \subseteq K[\underline{T}, \underline{X}]$$

gilt $J \cap K[\underline{X}] = I_1 \cap \cdots \cap I_m$.

(b) Seien weiter $f_1, \dots, f_m \in K[\underline{X}]$ gegeben und sei

$$\begin{aligned} L &:= (f_1 + I_1) \cap \cdots \cap (f_m + I_m) \\ &= \{f \in K[\underline{X}] \mid f \equiv_{I_1} f_1, \dots, f \equiv_{I_m} f_m\}. \end{aligned}$$

Zeige $L = f + (I_1 \cap \cdots \cap I_m) = f + (J \cap K[\underline{X}])$ für alle $f \in L$.

(c) Sei nun ferner G eine Gröbnerbasis von J bezüglich der lexikographischen Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ auf $[\underline{T}, \underline{X}]$ und $h \in K[\underline{T}, \underline{X}]$ reduziert modulo G mit $T_1 f_1 + \cdots + T_m f_m \xrightarrow[G]{*} h$. Zeige $L \neq \emptyset \iff h \in K[\underline{X}] \iff h \in L$.

Aufgabe 2. (Interpolationslemma)
Seien K ein Körper, $\ell \in \mathbb{N}_0$, $x_1, \dots, x_\ell \in K^n$ paarweise verschieden und $y_1, \dots, y_\ell \in K$. Zeige, dass es $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ gibt mit $f(x_i) = y_i$ für $i \in \{1, \dots, \ell\}$.

Aufgabe 3. (Sudokus und Shidokus, Fortsetzung von Aufgabe 2 auf Blatt 9)
Sei $k \in \{2, 3\}$. Wir identifizieren den Vektorraum der $k^2 \times k^2$-Matrizen $\mathbb{C}^{k^2 \times k^2}$ mit $\mathbb{C}^{k^4}$, indem wir die Einträge der Matrix wie einen Text lesen. Weiter fassen wir eine $k^2 \times k^2$-Matrix auch als eine $k \times k$-Matrix von $k \times k$-Matrizen auf, die wir *Blöcke* nennen. Ein *Sudoku* (für $k = 3$) bzw. ein *Shidoku* (für $k = 2$) ist eine $k^2 \times k^2$-Matrix, in deren k^2 Zeilen, k^2 Spalten und k^2 Blöcken jeweils alle Zahlen von 1 bis k^2 (genau) einmal vorkommen. Ein *Sudokurätsel* (für $k = 3$) bzw. *Shidokurätsel* (für $k = 2$) ist eine Einschränkung eines Sudoku bzw. Shidoku (aufgefasst als Funktion $\{1, \dots, k^2\}^2 \to \{1, \dots, k^2\}$), welche genau eine Fortsetzung zu einem Sudoku bzw. Shidoku hat.

In Aufgabe 1 von Blatt 9 wurde ein `SINGULAR`-Code zum Lösen von Sudokurätseln entwickelt. Dabei wurde ein Sudoko als polynomielles Gleichungssystem implementiert, in dem in jeder Gleichung höchstens zwei Variablen vorkommen.

(a) Passe den Code aus Aufgabe 1 von Blatt 9 so an, dass er nun statt auf Sudoku auf Shidoku ausgelegt ist.

(b) Finde mit Hilfe des Codes aus (a) ein Shidokurätsel und löse es.

(c) Versuche mit dem Code aus (a) eine Gröbnerbasis für die Varietät aller Shidokus zu berechnen. Was beobachtest Du?

(d) Erstelle in einem Texteditor eine Datei mit folgendem Inhalt, wobei der Kommentar mit Inhalt zu füllen ist:

```
ring A=0,(t,x(1..4)),dp;
poly p=(t-x(1))*(t-x(2))*(t-x(3))*(t-x(4))-(t-1)*(t-2)*(t-3)*(t-4);
matrix c=coeffs(p,t);
ideal J=(c[1..4,1]);
ring R=0,(x(1..16)),dp;
ideal I;
proc f(k,l,m,n) {map phi=A,0,x(k),x(l),x(m),x(n); I=I+phi(J);}
/* Hier die Spielregeln in das Ideal I kodieren. */
ideal IG=groebner(I);
vdim(IG);
int i; intvec v;
for (i=1;i<16;i++)
{v=1..16; v[16]=i; v[i]=16;
 ring S=0,(x(v[1]),x(v[2]),x(v[3]),x(v[4]),x(v[5]),x(v[6]),
           x(v[7]),x(v[8]),x(v[9]),x(v[10]),x(v[11]),x(v[12]),
           x(v[13]),x(v[14]),x(v[15]),x(v[16])),lp;
 poly p,pp; p=groebner(imap(R,IG))[1]; pp=diff(p,x(i));
 variables(p);gcd(p,pp);};
```

Lese den Inhalt der Textdatei in SINGULAR ein oder kopiere ihn mit der Maus hinein.

(e) Formatiere und kommentiere den Code aus (d) so gut, so dass jeder verstehen kann, warum dieser Code die Anzahl der Shidokus berechnet.

(f) Baue den Code aus (d) so um, dass er nun das Shidokurätsel aus (b) löst.

(g) Passe schließlich den Code aus Aufgabe (f) so an, dass er nun statt auf Shidoku auf Sudoku ausgelegt ist. Versuche damit ein Sudoku zu lösen. Was beobachtest Du?

Aufgabe 4. (Weihnachtskür)
Finde eine Aufgabe zum Lösen eines kombinatorischen Problems oder dem Zählen von kombinatorischen Objekten, die man mit SINGULAR lösen kann und die noch schöner ist als die Aufgaben über Sudokus und Shidokus. Löse sodann die gefundene Aufgabe.

Abgabe bis Montag, den 9. Januar 2012, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.