Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie II

Blatt 3

Aufgabe 59
Zeigen Sie die universelle Eigenschaft des direkten Limes, und dass dieser dadurch eindeutig bestimmt ist. Formulieren und beweisen Sie die entsprechende universelle Eigenschaft des inversen Limes.

Aufgabe 60
Sei G eine proendliche Gruppe und A ein diskreter G-Modul.
(a) Geben Sie eine explizite Beschreibung von $H^2(G, A)$ durch Kozykel und Koränder.
(b) Sei $\xi \in Z^2(G, A)$ mit $\xi(\sigma, 1) = \xi(1, \sigma) = 1$ für alle $\sigma \in G$. Zeigen Sie: Das kartesische Produkt $A \times G$ wird durch

$$(a_1, \sigma_1) \cdot (a_2, \sigma_2) := (a_1 + a_2^{\sigma_2} + \xi(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_1\sigma_2)$$

zu einer Gruppe, in der die Wirkung von G auf A der Konjugation entspricht.

Aufgabe 61
Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung mit $G = \mathrm{Gal}(L|K)$. Man kann zeigen, dass L eine *Normalbasis* besitzt, also eine K-Basis der Form $\{a^g : g \in G\}$ für ein $a \in L$. Für $\xi \in Z^1(G, L)$ schreibe $\xi(\sigma) = \sum_{g\in G} \xi_{\sigma,g} a^g$ mit $\xi_{\sigma,g} \in K$.
(a) Bestimmen Sie $\xi_{\sigma\tau,g}$ für $\sigma, \tau, g \in G$.
(b) Bestimmen Sie $b^\sigma - b$ für $b = \sum_{g\in G} \xi_{g^{-1},1} a^g$, $\sigma \in G$.
(c) Folgern Sie die *additive Form von Hilberts Theorem 90*: $H^1(G, L) = 0$.

Aufgabe 62
Sei $d \in \mathbb{N}$ und K ein Körper mit $\mu_d \subseteq K$ und $v(d) = 0$. Sei $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ eine normalisierte diskrete Bewertung auf K und sei $a \in K^\times$. Zeigen Sie: Genau dann ist v unverzweigt in $K(\sqrt[d]{a})$, wenn $v(a) \equiv 0 \bmod d$.

Abgabe: bis Freitag 16.05.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.