Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie II

Blatt 5

Aufgabe 67

Sei $M|K$ eine Galoiserweiterung und $\mathcal{N}$ die Menge der endlichen galoisschen Teilerweiterungen $L|K$. Sei v eine diskrete Bewertung auf K und w eine (nicht normierte) Fortsetzung auf M. Für $L \in \mathcal{N}$ sei $w_L = w|_L$ die Einschränkung von w auf L. Zeigen Sie:

(a) Sind $L_1, L_2 \in \mathcal{N}$ mit $L_1 \subseteq L_2$, so ist $\mathrm{res}_{L_2|L_1}(Z_{w_{L_2}|v}) = Z_{w_{L_1}|v}$.
(b) $Z_{w|v} = \varprojlim_{L\in\mathcal{N}} Z_{w_L|v}$ und $T_{w|v} = \varprojlim_{L\in\mathcal{N}} T_{w_L|v}$.
(c) Ist $T_{w|v} = 1$, so ist $w|v$ unverzweigt, d.h. $w(M^\times) = v(K^\times)$.

Aufgabe 68

Wir betrachten die Kurve $C : x^2 + y^2 + z^2 = 0$ über $K = \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass C eine nichttriviale K-Form von $\mathbb{P}^1_K$ ist.
(b) Bestimmen Sie die zugehörige Kohomologieklasse $\xi_C \in H^1(G_K, \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1))$.

Aufgabe 69

Sei K ein vollkommener Körper.

(a) Erklären Sie, wie die Gruppen $\mathrm{GL}_n := \mathrm{GL}_n(\overline{K})$ und
$$\mathrm{SL}_n := \{A \in \mathrm{GL}_n : \det(A) = 1\}$$
als affine algebraische Gruppen über K aufgefasst werden können.
(b) Sei $L|K$ endlich galoissch mit $G = \mathrm{Gal}(L|K)$ und sei $\xi \in Z^1(G, \mathrm{GL}_n(L))$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\sum_{\sigma\in G} \xi(\sigma)x^\sigma$, $x \in L^n$, den L^n aufspannen.
(c) Folgern Sie, dass $H^1(K, \mathrm{GL}_n) = 1$ und $H^1(K, \mathrm{SL}_n) = 1$ für alle n.

Aufgabe 70

Sei K ein vollkommener Körper.

(a) Zeigen Sie: Ein $\overline{K}$-Vektorraum $M = \overline{K}^{\oplus I} = \bigoplus_{i\in I} \overline{K}x_i$ wird durch $(\sum_{i\in I} a_i x_i)^\sigma = \sum_{i\in I} a_i^\sigma x_i$ zu einem diskreten G_K-Modul mit $H^1(G_K, M) = 0$. *Hinweis: #61*
(b) Sei V eine affine K-Varietät. Für $f \in \overline{K}[X]$ sei $\bar{f} = f + \mathcal{I}_{\overline{K}}(V) \in \overline{K}[V]$ und $\xi(\sigma) = f^\sigma - f$. Zeigen Sie: Ist $\bar{f}^\sigma = \bar{f}$ für alle $\sigma \in G_K$, so ist $\xi \in Z^1(G_K, \mathcal{I}_{\overline{K}}(V))$. Schließen Sie, dass $\overline{K}[V]^{G_K} = K[V]$ (vgl. II.1.16).
(c) Seien $V \subseteq \mathbb{P}^n$, $W \subseteq \mathbb{P}^m$ geometrisch irreduzible projektive K-Varietäten und sei $f : V_{\overline{K}} \to W_{\overline{K}}$ ein $\overline{K}$-Morphismus. Zeigen Sie: Genau dann ist f ein K-Morphismus, wenn $f = f^\sigma$ für alle $\sigma \in G_K$.

Abgabe: bis Mittwoch 28.05.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.