Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie II

Blatt 6

Aufgabe 71

Sei Γ eine K-algebraische Gruppe. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\Gamma_{\overline{K}})$ die Gruppe der $\overline{K}$-Automorphismen von Γ als algebraische Gruppe. Unter einer K-Form von Γ verstehen wir eine K-algebraische Gruppe Γ' mit $\Gamma_{\overline{K}} \cong \Gamma'_{\overline{K}}$ (als algebraische Gruppen).

(a) Ordnen Sie einer K-Form Γ' von Γ ein $\xi_{\Gamma'} \in H^1(G_K, \mathrm{Aut}(\Gamma))$ zu.
(b) Zeigen Sie: Sind Γ', Γ'' zwei K-Formen von Γ und ist $\xi_{\Gamma'} = \xi_{\Gamma''}$, so ist $\Gamma' \cong \Gamma''$.
(c) Sei $\mathbb{G}_a$ die additive Gruppe über K. Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_a)$ als G_K-Modul.
(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{G}_a$ keine nichttrivialen K-Formen besitzt.

Aufgabe 72

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Für eine K-Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n_K = \mathbb{P}^n(\overline{K})$ sei $V_L \subseteq \mathbb{P}^n_L = \mathbb{P}^n(\overline{L})$ die L-Varietät $\mathcal{V}_L(\mathcal{I}_K(V))$. Zeigen Sie:

(a) Jeder Morphismus $f : V \to W$ von K-Varietäten setzt sich eindeutig zu einem Morphismus $f : V_L \to W_L$ fort.
(b) Ist E eine elliptische Kurve über K, so ist E_L eine elliptische Kurve über L.
(c) Ist C ein E-Torsor, so ist C_L ein E_L-Torsor.

Aufgabe 73

Beweisen Sie die Fälle $j_E = 0, 1728$ von Satz 6.10.

Aufgabe 74

Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$. Für $a, b \in K$ betrachten wir die projektive Kurve

$$E_{a,b} : y^2 = x^3 + ax^2 + bx.$$

(a) Für welche a, b ist $E_{a,b}$ eine elliptische Kurve?
(b) Zeigen Sie: Genau dann ist eine elliptische Kurve $E|K$ isomorph zu einem $E_{a,b}$, wenn $|E(K)[2]| \geq 2$.

Abgabe: bis Freitag 06.06.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.