Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie II

Blatt 7

Aufgabe 75

Sei K ein vollkommener Körper und $\mathbb{G}_m = \mathrm{GL}_1$ die multiplikative Gruppe über K.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_m) \cong \mu_2$.

(b) Für $a \in K^\times$ sei $\mathbb{G}_m[a] \subseteq \mathbb{A}^2$ die affine ebene Kurve
$$\mathbb{G}_m[a] : x^2 - ay^2 = 1,$$
und sei $\varphi : \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ gegeben durch
$$\varphi(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1x_2 + ay_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$
Zeigen Sie, dass $G' = \mathbb{G}_m[a]$ mit Multiplikation $\varphi|_{G' \times G'}$ eine K-Form von $\mathbb{G}_m$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Abbildung $a \mapsto \xi_{\mathbb{G}_m[a]} \in H^1(G_K, \mathrm{Aut}(\mathbb{G}_m)) \cong K^\times/(K^\times)^2$.

(d) Schließen Sie, dass die K-Formen von $\mathbb{G}_m$ genau die $\mathbb{G}_m[a]$, $a \in K^\times$, sind.

Aufgabe 76

Sei $E|K$ eine elliptische Kurve, (C, μ) ein E-Torsor und $\alpha \in \mathrm{Aut}_K(E, O_E)$. Zeigen Sie:

(a) Durch $\mu^\alpha(P, Q) = \mu(\alpha(P), Q)$ wird ein E-Torsor $(C, \mu)^\alpha := (C, \mu^\alpha)$ definiert.

(b) Ist der Torsor (C, μ) trivial, so ist $(C, \mu)^\alpha \cong (C, \mu)$.

(c) Ist (C, μ') ein weiterer E-Torsor, so ist $(C, \mu') \cong (C, \mu)^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathrm{Aut}(E, O_E)$.

(d) Die Abbildung $i_1 : H^1(G_K, E) \to H^1(G_K, \mathrm{Aut}(E))$ hat endliche Fasern.

Aufgabe 77

Sei K ein vollkommener Körper, $E|K$ eine elliptische Kurve und (C, μ) ein E-Torsor (im Sinne von Definition 7.1). Betrachte
$$\alpha = \mu \times \pi_2 : E \times C \to C \times C$$
wie in Bemerkung 7.7. Zeigen Sie:

(a) α ist ein bijektiver K-Morphismus.

(b) Ist $f : V \to W$ ein injektiver Morphismus geometrisch irreduzibler K-Varietäten mit $K(V)|f^*(K(W))$ endlich separabel, so ist f birational.

(c) Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, so ist α ein Isomorphismus.

Abgabe: bis Freitag 13.06.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.