Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $v : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine $\mathbb{R}$-Bewertung auf einem Körper K, und sei $\mathcal{O} = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{O}$ ist ein Bewertungsring, d.h. für alle $x \in K^\times$ ist $x \in \mathcal{O}$ oder $x^{-1} \in \mathcal{O}$.
(b) $\mathcal{O}$ ist lokal, ganzabgeschlossen und $\dim(\mathcal{O}) = 1$.
(c) $\mathcal{O}$ ist ein maximaler Unterring von K, d.h. ist $\mathcal{O} \subseteq R \subsetneqq K$ ein Ring, so ist $R = \mathcal{O}$.
(d) Genau dann ist $\mathcal{O}$ ein diskreter Bewertungsring, wenn $\min\{\gamma \in v(K^\times) : \gamma > 0\}$ existiert.

Aufgabe 2

Wir definieren die Höhe auf $\mathbb{Q}$ durch $H(\frac{a}{b}) = \max\{|a|, |b|\}$, wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie: Für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$ ist

(a) $H(\prod_{i=1}^n x_i) \leq \prod_{i=1}^n H(x_i)$,
(b) $H(\sum_{i=1}^n x_i) \leq n \prod_{i=1}^n H(x_i)$.

Wir definieren die Höhe auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ durch $H([x_0 : \dots : x_n]) = \max_i |x_i|$, wenn $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(x_0, \dots, x_n) = 1$.

(c) Geben Sie sinnvolle untere und obere Abschätzungen für $N(n, c) := \#\{P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) : H(P) < c\}$ an.
(d) Überzeugen Sie sich von der Plausibilität der Aussage

$$\lim_{c \to \infty} \frac{N(n, c)}{c^{n+1}} = \frac{2^n}{\zeta(n+1)},$$

wobei

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

die Riemannsche Zeta-Funktion ist.

Aufgabe 3

Es sei $\mathcal{S}_\mathbb{Q} = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ prim}\} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in \mathbb{Q}^\times$ ist $|x|_p = 1$ für fast alle $p \in \mathcal{S}_\mathbb{Q}$, und $\prod_{p \in \mathcal{S}_\mathbb{Q}} |x|_p = 1$.
(b) Für $P = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ ist $H(P) = \prod_{p \in \mathcal{S}_\mathbb{Q}} \max_i |x_i|_p$.

Abgabe: bis Dienstag 05.11.2013, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.