Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 11

Aufgabe 38

Sei C eine glatte projektive geometrisch irreduzible K-Kurve und $f : C \to \mathbb{P}^1$ ein nicht-konstanter Morphismus vom Grad $\deg(f) > 1$. Zeigen Sie:

(a) Der Morphismus f hat mindestens einen Verzweigungspunkt $P \in \mathbb{P}^1$.
(b) Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, so hat f mindestens einen Verzweigungspunkt $P \in \mathbb{A}^1$.

Aufgabe 39

Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $g \in K[x]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 3$ ohne doppelte Nullstellen. Wir betrachten die Kurve $C : y^2 = g(x)$ und ihr glattes Modell $\hat{C} \to C$. Benutzen Sie die Formel von Riemann-Hurwitz, um zu zeigen, dass

$$g_{\hat{C}} = \begin{cases} (n-1)/2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (n-2)/2 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Aufgabe 40

Sei $K = \overline{K}$ und $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Eine *hyperelliptische Kurve* ist eine glatte projektive Kurve C vom Geschlecht $g_C \geq 2$ mit einem Morphismus $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ vom Grad $\deg(\pi) = 2$. Zeigen Sie:

(a) Jede hyperelliptische Kurve ist das glatte Modell einer Kurve $y^2 = g(x)$ wie in Aufgabe 39.
(b) Der Morphismus π ist eindeutig bis auf einen Automorphismus des $\mathbb{P}^1$.
(c) Jede glatte projektive Kurve C vom Geschlecht $g_C = 2$ ist hyperelliptisch.

Aufgabe 41

Für $b \in \mathbb{Q}^\times$ sei $E_b|\mathbb{Q}$ die elliptische Kurve $E_b : y^2 = x^3 + b$. Zeigen Sie:

(a) Die E_b bilden unendlich viele $\mathbb{Q}$-Isomorphieklassen.
(b) Über $\overline{\mathbb{Q}}$ sind alle E_b zueinander isomorph.
(c) Geben Sie ein Beispiel einer elliptischen Kurve über $\overline{\mathbb{Q}}$, die nicht isomorph zu einer über $\mathbb{Q}$ definierten ist (vgl. Aufgabe 17).

Abgabe: bis Dienstag 28.01.2014, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.