Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

**Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I**

Blatt 13

Aufgabe 46
Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2$ die ebene Kubik
$$C : y^2 = x^3.$$
Zeigen Sie:
(a) Der Sekantenprozess aus II.3.4 definiert eine Verknüpfung $\oplus$ auf C_{reg}.
(b) Die rationale Funktion $\frac{x}{y}$ induziert einen Isomorphismus $(C, \oplus) \cong \mathbb{G}_a$.

Aufgabe 47
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und Restklassenkörper k, und sei
$$E : y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in R$$
eine elliptische Kurve gegeben durch eine ganze kurze Weierstraßgleichung. Beweisen Sie, dass die Reduktion $E(K) \to \overline{E}(k)$ einen Homomorphismus $E^0(K) \to \overline{E}_{\text{reg}}(k)$ induziert, also dass $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$ für $P, Q \in E^0(K)$. Beachten Sie dabei, dass der Fall $\overline{P} = \overline{Q}$ eintreten kann.

Aufgabe 48
Sei $E|\mathbb{C}$ eine elliptische Kurve. Man kann zeigen: Es existiert ein vollständiges Gitter $\Lambda \leq \mathbb{C}$, so dass $E(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}/\Lambda$ als Gruppe und als komplexe Mannigfaltigkeit. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass
$$E[m] = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$
und $\deg([m]) = m^2$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 49
Wir betrachten die elliptische Kurve
$$E : y^2 = x^3 + 3$$
über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:
(a) $|\overline{E}(\mathbb{F}_5)| = 6$ und $|\overline{E}(\mathbb{F}_7)| = 13$
(b) $E(\mathbb{Q})_{\text{tors}} = \{0\}$
(c) Es gibt unendlich viele $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $y^2 = x^3 + 3$.

Abgabe: bis Dienstag 11.02.2014, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.