Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 2

Aufgabe 4
Der Ring der formalen Potenzreihen über einem Körper K ist

$$K[[t]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k : a_k \in K \right\},$$

der Körper der formalen Laurentreihen über K ist

$$K((t)) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} a_k t^k : n \in \mathbb{Z}, a_k \in K \right\},$$

jeweils mit komponentenweiser Addition und Faltung als Multiplikation. Zeigen Sie:

(a) $K[[t]]$ ist ein Integritätsbereich und $K((t))$ ist sein Quotientenkörper.
(b) $v(\sum_k a_k t^k) = \inf\{k : a_k \neq 0\}$ definiert eine diskrete Bewertung auf $K((t))$.
(c) $K((t))$ ist die Vervollständigung von $K(t)$ bezüglich $|.|_v$.

Aufgabe 5
Wie üblich sei $\mathbb{Q}_p$ der Körper der p-adischen Zahlen.

(a) Zeigen Sie: Jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ lässt sich eindeutig als konvergente Reihe $x = \sum_{k=n}^{\infty} a_k p^k$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \{0, \ldots, p-1\}$ schreiben (*p-adische Darstellung*).
(b) Geben Sie die p-adische Darstellung von -1 und von $(1-p)^{-1}$ an.
(c) Geben Sie die 5-adische Darstellung von $\frac{2}{3}$ und von $-\frac{2}{3}$ an.

Aufgabe 6
Es bezeichne $\mu_n \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln.

(a) Zeigen Sie, dass $\mu_{p-1} \subseteq \mathbb{Q}_p$.
(b) Schließen Sie, dass $\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_q$ schon $p = q$ impliziert.
Sie dürfen sich auf den Fall $p \not\equiv 1 \bmod q$ beschränken.

Aufgabe 7
Sei F vollständig bezüglich des ultrametrischen Absolutbetrags $|.| = |.|_v$. Sei $f \in \mathcal{O}_v[X]$ und $a_0 \in \mathcal{O}_v$ mit $|f(a_0)| < |f'(a_0)|^2$. Setze $\delta = |f'(a_0)^{-2} f(a_0)|$ und definiere eine Folge $(a_k)_{k \geq 0}$ induktiv durch

$$a_{k+1} = a_k - f'(a_k)^{-1} f(a_k).$$

(a) Zeigen Sie: Für jedes $k \geq 0$ ist $|a_k| \leq 1$, $|a_k - a_0| \leq \delta$ und $|f'(a_k)^{-2} f(a_k)| \leq \delta^{2^k}$.
(b) Beweisen Sie den Satz von Hensel-Rychlik: Ein f wie oben besitzt eine Nullstelle $a \in \mathcal{O}_v$ mit $|a - a_0| \leq \delta$.
(c) Geben Sie mit (b) einen neuen Beweis für Korollar I.3.9.

Abgabe: bis Dienstag 12.11.2013, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.