Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 5

Aufgabe 14
Sei p eine Primzahl. Wir definieren den inversen Limes $\varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ als den Unterring

$$\varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \ : \ \pi_k(x_k) = x_{k-1} \text{ für alle } k \right\}$$

des direkten Produktes $\prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, wobei $\pi_k : \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{k-1}\mathbb{Z}$ die natürliche Projektion ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p/p^k\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.
(b) Konstruieren Sie einen Ringisomorphismus $\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$.

Aufgabe 15
Bestimmen Sie die absolute Höhe $H(\alpha_i)$ der folgenden Elemente von $\overline{\mathbb{Q}}$: $\alpha_1 = \sqrt[4]{3}$, $\alpha_2 = \sqrt{3}+1$, $\alpha_3 = 3(\sqrt{3}+1)$, $\alpha_4 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2}$, $\alpha_5 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+4}$.

Aufgabe 16
Sei $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Beweisen Sie den *Satz von Kronecker*: Genau dann ist $H(x) = 1$, wenn x eine Einheitswurzel ist.

Aufgabe 17
Geben Sie ein konkretes Beispiel für

(a) eine $\mathbb{Q}$-Varietät, die irreduzibel aber nicht geometrisch irreduzibel ist;
(b) zwei $\mathbb{Q}$-Varietäten, die nicht isomorph sind, die aber über $\overline{\mathbb{Q}}$ isomorph werden;
(c) eine $\overline{\mathbb{Q}}$-Varietät, die nicht über $\mathbb{Q}$ definiert ist. Ist Ihr Beispiel *isomorph* zu einer über $\mathbb{Q}$ definierten $\overline{\mathbb{Q}}$-Varietät?

Abgabe: bis Dienstag 03.12.2013, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.