Universität Konstanz Arno Fehm
Fachbereich Mathematik und Statistik Christoph Hanselka
Sommersemester 2015

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 5 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 17. Finde für die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R})$ eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ derart, dass $U^{-1}AU$ in Normalform für nilpotente Matrizen ist (wie in Satz 6.14), wobei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 16 & -4 & 7 \\ -4 & 8 & 8 & -4 & 8 \\ 2 & -4 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende den Algorithmus aus dem Beweis des Satzes. Außerdem darfst Du benutzen, dass

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } A^3 = 0.$$

Sei $U_i = \mathrm{Ker}\, f_A^i \subseteq \mathbb{R}^5$. Um Rechenarbeit zu sparen, überlege wie man aus obigem jeweils $\dim U_i$ ablesen kann und dann leicht (d.h. ohne zu rechnen) Basen der U_i findet.

Lösungsskizze: Setze $f = f_A$. Wir sehen sofort, dass die letzten drei Spalten von A linear unabhängig sind, weshalb A mindestens Rang 3 hat, also ist $\dim U_1 \leq 2$. Seien $a_4, a_5 \in \mathbb{R}^5$ die vierte bzw. fünfte Spalte von A. Da die letzten beiden Spalten von A^2 Null sind, gilt $a_4, a_5 \in U_1$. Es gilt nämlich $0 = A^2 e_i = A(Ae_i) = Aa_i$ für $i = 4, 5$. Da a_4 und a_5 linear unabhängig sind, gilt also auch umgekehrt $\dim U_1 \geq 2$ und damit $\dim U_1 = 2$. Insbesondere bilden a_4 und a_5 eine Basis von U_1. Um weitere Rechnungen[1] zu vereinfachen setzen wir $b_4 := \frac{1}{2}a_4 = (-2, -2, 1, 0, 0)^t$ sowie $b_5 := a_5 + 4b_4 = (-1, 0, 0, 1, 0)$, womit b_4, b_5 auch eine Basis von U_1 bilden.

Da A^2 offensichtlich Rang 1 hat, ist $\dim U_2 = 4$. Man kann sogar unmittelbar eine Basis von U_2 ablesen, nämlich z.B. die Einheitsvektoren e_1, e_4, e_5 zusammen mit $v = (0, 2, -1, 0, 0)^t$.

Nun zur Konstruktion einer geeigneten Basis und der W_i aus dem Beweis. Da A Nilpotenzklasse 3 hat, wissen wir aus dem Satz schon, dass J_3 der größte Jordanblock ist.

Da $A^2 e_2 \neq 0$ ist $e_2 \notin U_2$. Damit gilt aus Dimensionsgründen für $W_3 := \mathbb{R}e_2$, dass $\mathbb{R}^5 = U_3 = U_2 \oplus W_3$. e_2 wird damit der letzte Basisvektor des größten Jordanblocks.

---

[1] genauer gesagt, die einzige Rechnung, die wir noch durchzuführen haben.

Wir wollen nun W_2 derart finden, dass $U_2 = U_1 \oplus W_2$ und $f(W_3) \subseteq W_2$. Dafür muss $\dim W_2 = \dim U_2 - \dim U_1 = 4 - 2 = 2$ gelten. Wir brauchen also noch einen Vektor $w \in U_2 \setminus f(W_3)$ derart, dass für $W_2 := \mathbb{R}w \oplus f(W_3) = \mathbb{R}w \oplus \mathbb{R}f(e_2)$ gilt $U_2 = U_1 \oplus W_2$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $w, f(e_2), b_4, b_5$ linear unabhängig sind. Wie sich sehr leicht nachrechnen lässt, ist dies z.B. von $w = e_5$ erfüllt. e_5 wird damit zum letzten Basisvektor des zweitgrößten Jordanblocks.

Wie im Beweis des Satzes ist $f|_{W_2}$ injektiv, weshalb $\dim f(W_2) = 2$. Da $f(W_2) \subseteq U_1$ und auch $\dim U_1 = 2$ gilt also $f(W_2) = U_1$. (Dies lässt sich auch leicht direkt nachprüfen.) Also wählen wir $W_1 := f(W_2)$ und bekommen $U_1 = U_0 \oplus W_1$ (beachte $U_0 = 0$). Damit sind wir mit der Konstruktion am Ende und können $U := (f^2(e_2)\ f(e_2)\ e_2\ f(e_5)\ e_5) \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R})$ wählen, was uns laut dem Beweis des Satzes das Gewünschte liefert.

Noch eine ergänzende Erläuterung zum letzten Schritt. Um sich zu vergewissern, dass $U^{-1}AU$ die gewünschte Normalform hat, brauchen wir nur, dass U invertierbar ist, d.h. die Spalten von U eine Basis bilden. Die Darstellungsmatrix von f_A bezüglich dieser ist dann sehr einfach und lässt sich unmittelbar ablesen. (Falls es nicht klar ist, bitte davon überzeugen!) Wir fassen nun nochmal die Argumentation auf dem Beweis des Satzes zusammen um direkt nachzuprüfen, dass $f^2(e_2), f(e_2), e_2, f(e_5), e_5$ linear unabhänging sind. Sei also

$$\alpha_1 f^2(e_2) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_3 e_2 + \alpha_4 f(e_5) + \alpha_5 e_5 = 0.$$

Da $f^3 = 0$ ist $\Im f \subseteq \operatorname{Ker} f^2$, insbesondere $f(e_2) \in \operatorname{Ker} f^2$. Außerdem haben wir e_5 gewählt, da u.a. $e_5 \in \operatorname{Ker} f^2$. Da $\operatorname{Ker} f^2$ f-invariant ist, bekommen wir also insgesamt

$$\alpha_1 f^2(e_2) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_4 f(e_5) + \alpha_5 e_5 \in \operatorname{Ker} f^2.$$

Nach Wahl ist aber $e_2 \notin \operatorname{Ker} f^2$ und somit ergibt sich schonmal $\alpha_3 = 0$ und damit

$$\alpha_1 f^2(e_2) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_4 f(e_5) + \alpha_5 e_5 = 0.$$

. Da sogar $f(\operatorname{Ker} f^2) \subset \operatorname{Ker} f$ sind also $f^2(e_2), f(e_5) \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(b_4, b_5)$. Wir haben oben schon nachgerechnet, dass $e_5, f(e_2), b_4, b_5$ linear unabhängig sind, woraus auch $\alpha_2 = \alpha_5 = 0$ und damit

$$0 = \alpha_1 f^2(e_2) + \alpha_4 f(e_5) = f(\alpha_1 f(e_2) + \alpha_4 e_5).$$

Dies bedeutet, dass $\alpha_1 f(e_2) + \alpha_4 e_5 \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(b_4, b_5)$. Wieder aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $f(e_2), e_5, b_4, b_5$ ist damit auch $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$.