Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Übungsblatt 6 zur Linearen Algebra II

Bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und $\| \cdot \|$ die dadurch induzierte euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sagen wir x ist *orthogonal zu* y, in Zeichen $x \perp y$, falls $\langle x, y \rangle = 0$.

Aufgabe 22. Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ trigonalisierbar.

(a) Zeige, dass es $D \in \mathrm{Mat}_n(K)$ diagonalisierbar und $N \in \mathrm{Mat}_n(K)$ nilpotent gibt mit $A = D + N$ und $ND = DN$.

(b) Sei nun $K = \mathbb{R}$. Berechne A^{37}, wobei A gegeben sei durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23. Wir definieren das *Kreuzprodukt* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch folgende Vorschrift

$$(v, w) \mapsto v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Zeige:

(a) Das Kreuzprodukt ist $\mathbb{R}$-bilinear und antisymmetrisch, d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} (au + bv) \times w &= a(u \times w) + b(v \times w) \\ u \times (av + bw) &= a(u \times v) + b(u \times w) \\ v \times w &= -w \times v \end{aligned}$$

(b) Für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\det(u\ v\ w) = \langle u, v \times w \rangle$$

wobei $(u\ v\ w) \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ die Matrix mit Spalten u, v und w bezeichne.

(c) Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist $v \times w$ sowohl zu v, als auch zu w orthogonal.

Aufgabe 24. Beweise folgende Variante vom Satz des Pythagoras[1]: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \perp y$ ist $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Folgere hieraus die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Hinweis: Betrachte im zweiten Teil zunächst den Fall $\|x\| = 1$, zerlege y in eine zu x parallele und eine zu x orthogonale Komponente und berechne dann $\|y\|^2$.

Aufgabe 25. Sei $\beta\colon \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(A, B) \mapsto \operatorname{Tr}(A^t B)$$

(a) Zeige, dass β eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist.

(b) Gib einen Isomorphismus $\varphi\colon \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ derart an, dass

$$\beta(A, B) = \langle \varphi(A), \varphi(B) \rangle$$

für alle $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Zusatzaufgabe 26. Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}_K(V)$. Seien außerdem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ paarweise verschieden und $P_f = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)$ das Minimalpolynom von f. Setze $Q_i := \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)$. Zeige:

(a) Es gibt $a_1, \ldots, a_m \in K$ mit $1 = \sum_i a_i Q_i$.

Hinweis: Zeige, dass $Q_1, \ldots, Q_m \in K[t]_{\leq m-1}$ linear unabhängig sind.

(b) $V = \sum_i \operatorname{Im} Q_i(f)$ und $\operatorname{Im} Q_i(f) = \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$.

(c) f ist diagonalisierbar.

Bemerkung: Dies soll ermöglichen, z.B. den entscheidenden Schritt aus Aufgabe 18(a) zu beweisen, bzw. zu verallgemeinern, ohne das Ergebnis aus Aufgabe 16 zu verwenden.

Abgabe bis Donnerstag, den 21. Mai, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.

[1] und überlege inwiefern diese Bezeichnung gerechtfertigt ist.