Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 27. (Gramsche Determinante) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Sei U ein weiterer endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V)$. Wir definieren $\alpha\colon U \times U \to \mathbb{R}$ durch

$$(x, y) \mapsto \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$$

Zeige, dass α eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform ist, die genau dann positiv definit (und damit nicht ausgeartet) ist, wenn φ injektiv ist.

(b) Zeige, dass $v_1, \dots, v_m \in V$ genau dann linear unabhängig sind, wenn ihre *Gramsche Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Aufgabe 28. (Polynomiale Regression) Seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene „Stützstellen“ und $V := \mathbb{R}[t]_{\leq n}$.

(a) Zeige, dass durch

$$\langle P, Q \rangle := \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$$

eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V gegeben ist.

(b) Sei $d \leq n$, $W := \mathbb{R}[t]_{\leq d}$ und $P_0, \dots, P_d \in W$ eine Orthonormalbasis von W bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Weiter seien „Messdaten“ $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeige, dass

$$P := \sum_{j=0}^{d} \sum_{i=0}^{n} y_i P_j(x_i) P_j$$

das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens d ist, für welches die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2$$

minimal ist. **Hinweis:** Orthogonale Projektion, Satz des Pythagoras.

(c) Führe für $d = n = 2$ und $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 2)$ das Gram-Schmidt-Verfahren für $1, t, t^2$ durch, um eine Orthonormalbasis von W zu erhalten.

Aufgabe 29. Zeige:

(a) $O_1 = \{\pm 1\}$, $U_1 = \{ x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1 \}$ und die Abbildung $\varphi\colon U_1 \to SO_2$, gegeben durch

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + bi \in U_1$, ist ein (wohldefinierter) Gruppenisomorphismus.

(b) $O_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\varepsilon \sin\alpha \\ \sin\alpha & \varepsilon\cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi), \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\}$

Aufgabe 30. Sei $U \in O_3$. Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$U(x \times y) = \det U \cdot (Ux \times Uy).$$

Insbesondere besteht SO_3 genau aus den orthogonalen Matrizen, die mit dem Kreuzprodukt verträglich sind.

Zusatzaufgabe 31. (Permutationsmatrizen) Zu $\sigma \in S_n$ sei $P_\sigma := (\delta_{\sigma(i),j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ die zugehörige *Permutationsmatrix* (siehe III.1.2.(e)). Sei nun $\sigma \in S_n$ fixiert.

(a) Zeige, dass P_σ orthogonal ist.

(b) Zeige, dass es eine Permutationsmatrix $U \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ und $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass

$$U^t P_\sigma U = \begin{pmatrix} P_{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{\sigma_k} \end{pmatrix}$$

wobei $\sigma_i \in S_{r_i}$ gegeben ist durch $\sigma_i(\ell) \mapsto \begin{cases} \ell + 1, & \text{falls } \ell < r_i \\ 1, & \text{falls } \ell = r_i \end{cases}$.

Hinweis: Wähle k minimal derart, dass es $1 \leq a_1, \ldots, a_k \leq n$ gibt mit

$$\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{ \sigma^\ell(a_i) \mid \ell \in \mathbb{N} \}.$$

(c) Zeige, dass -1 genau dann ein Eigenwert von P_σ ist, wenn mindestens eine der Zahlen $r_1, \ldots, r_k$ ungerade ist.

(d) Fasse $P_\sigma \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ auf und zeige, dass alle Eigenwerte von P_σ von der Gestalt $\mu_{r_i}^j$ sind, wobei für $r \in \mathbb{N}$ sei $\mu_r := e^{\frac{2\pi i}{r}}$.

Abgabe bis Donnerstag, den 28. Mai, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.