Universität Konstanz Arno Fehm
Fachbereich Mathematik und Statistik Christoph Hanselka
Sommersemester 2015

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 28. (Polynomiale Regression) Seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene „Stützstellen" und $V := \mathbb{R}[t]_{\leq n}$.

(a) Zeige, dass durch

$$\langle P, Q \rangle := \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$$

eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V gegeben ist.

(b) Sei $d \leq n$, $W := \mathbb{R}[t]_{\leq d}$ und $P_0, \dots, P_d \in W$ eine Orthonormalbasis von W bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiter seien „Messdaten" $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeige, dass

$$P := \sum_{j=0}^{d} \sum_{i=0}^{n} y_i P_j(x_i) P_j$$

das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens d ist, für welches die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2$$

minimal ist. **Hinweis:** Orthogonale Projektion, Satz des Pythagoras.

(c) Führe für $d = n = 2$ und $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 2)$ das Gram-Schmidt-Verfahren für $1, t, t^2$ durch, um eine Orthonormalbasis von W zu erhalten.

Lösungsvorschlag zu (c): Wir verwenden das Verfahren aus Theorem VI.4.9. Wir starten mit der Basis $(a_1, a_2, a_3) = (1, t, t^2)$. Dabei ist kein Teil der Basis orthonormal, was im Satz dem Fall $k = 0$ entspricht. Wir setzen also $U_0 := \{0\}$. Die orthogonale Projektion π_{U_0} auf U_0 ist die Nullabbildung und damit ist

$$\widetilde{a_1} := a_1 - \pi_{U_0}(a_1) = a_1 = 1$$

Wir setzen dann

$$b_1 := \frac{1}{\|\widetilde{a_1}\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

da $\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \sum_{i=0}^{2} 1^2 = 3$.

Im nächsten Schritt ist also der erste Vektor der Basis (b_1, a_2, a_3) (ortho-)normal. Wir setzen $U_1 := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{b_1\}$ und definieren

$$\begin{aligned}\widetilde{a_2} :&= a_2 - \pi_{U_1}(a_2) = a_2 - \langle a_2, b_1\rangle b_1\\ &= t - \langle t, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \sqrt{3} = t - \langle t, 1\rangle \frac{1}{3}\\ &= t - (0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1)\frac{1}{3} = t - 1\end{aligned}$$

und

$$b_2 := \frac{1}{\|\widetilde{a_2}\|}\cdot a_2 = \frac{t-1}{\sqrt{2}}$$

Im dritten und letzten Schritt sind schon die ersten beiden Vektoren der Basis (b_1, b_2, a_3) orthonormal. Wir setzen $U_2 := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{b_1, b_2\}$ und definieren

$$\begin{aligned}\widetilde{a_3} :&= a_3 - \pi_{U_2}(a_3) = t^2 - \langle a_3, b_1\rangle b_1 - \langle a_3, b_2\rangle b_2\\ &= t^2 - \langle t^2, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \sqrt{3} - \langle t^2, \frac{t-1}{\sqrt{2}}\rangle \frac{t-1}{\sqrt{2}}\\ &= t^2 - \langle t^2, 1\rangle \frac{1}{3} - \langle t^2, t-1\rangle \frac{t-1}{2}\\ &= t^2 - 5\cdot\frac{1}{3} - 4\cdot\frac{t-1}{2} = t^2 - \frac{5}{3} - 2(t-1)\\ &= t^2 - 2t + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

und

$$b_3 := \frac{1}{\|\widetilde{a_3}\|}\cdot a_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}(t^2 - 2t + \frac{1}{3})$$

Nun ist (b_1, b_2, b_3) unsere gewonnene Orthonormalbasis.