Universität Konstanz Arno Fehm
Fachbereich Mathematik und Statistik Christoph Hanselka
Sommersemester 2015

Übungsblatt 9 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 37.

(a) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Zeige, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn sie *orthogonal ähnlich* sind, d.h., wenn es $T \in O_n$ mit $B = T^{-1}AT$ gibt.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass es genau dann $U \in O_n$ mit $Ux = y$ gibt, wenn $\|x\| = \|y\|$.

Aufgabe 38. (Projektionen) Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$.

(a) Ist f idempotent (d.h. $f^2 = f$) so ist $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

(b) Ist f selbstadjungiert, so ist $\mathrm{Im}\, f \perp \mathrm{Ker}\, f$. Folgere, dass auch hier $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$ gilt.

(c) Genau dann ist f selbstadjungiert und idempotent, wenn f die orthogonale Projektion π_U auf einen Unterverktorraum U von V ist.

Aufgabe 39. Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und b eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass es genau eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform $\overline{b}$ auf dem Quotientenraum $\overline{V} := V/V^{\perp}$ gibt, mit $\overline{b}(\overline{x}, \overline{y}) = b(x, y)$ für alle $x, y \in V$. (Hierbei bezeichne wie üblich $\overline{x} = x + V^{\perp} \in \overline{V}$ für $x \in V$.)

Aufgabe 40. Wir statten die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit der Halbordnung der Mengeninklusion $\subseteq$ aus. Bestimme jeweils die Menge der minimalen, maximalen, kleinsten und größten Elemente sowie der oberen und unteren Schranken (in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) der Menge

(a) aller

(b) der endlichen

(c) der unendlichen

(d) der einelementigen

(e) der höchstens fünfelementigen

Teilmengen von $\mathbb{N}$.

Zusatzaufgabe 41. (Kleiner Ausflug in die Mechanik) Der *Trägheitstensor* eines starren Körpers[1] $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} I_M := b_{A_M} \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^t A_M y \end{aligned}$$

gegeben durch eine symmetrische Matrix $A_M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. Für $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$ ist $I_M(x,x)$ das benötigte Drehmoment um bei einer Rotation um die Achse $\mathbb{R}x$ den Körper M mit der Winkelbeschleunigung $\|x\|^2$ zu beschleunigen. Die Größe $\frac{I_M(x,x)}{\|x\|^2}$ ist das *Trägheitsmoment von M um die Achse $\mathbb{R}x$*. Für den Trägheitstensor gelten folgende Eigenschaften: Seien M, M_1, M_2 starre Körper.

- Sind M_1, M_2 disjunkt ist $I_{M_1 \cup M_2} = I_{M_1} + I_{M_2}$.
- Sind $T \in SO_3$ und $x, y \in \mathbb{R}^3$, so ist $I_M(Tx, Ty) = I_{T^{-1}M}(x, y)$. Dies entspricht der anschaulich klaren Tatsache, dass das Trägheitsmoment um eine mittels T rotierte Achse mit dem Trägheitsmoment des mittels T^{-1} entgegengesetzt rotierten Körpers übereinstimmt.
- Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A_M, so gilt stets

$$\lambda_i + \lambda_j \geq \lambda_k \quad \text{für } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}. \tag{$*$}$$

Für $a \in \mathbb{R}$ und $M = \{(a, 0, 0)^t\}$ gilt außerdem

$$A_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, das Trägheitsmoment einer normierten Punktmasse gleicht dem Quadrat ihres Abstandes zur Rotationsachse.

Zeige, dass es zu jedem starren Körper M genau einen (gestreckten) Oktaeder O gibt, dessen Trägheitstensor mit dem von M übereinstimmt. Hiermit ist gemeint, dass O von der Gestalt

$$O = \{\, Tx \mid x \in \{\pm a e_1, \pm b e_2, \pm c e_3\} \,\}$$

ist, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$, $T \in SO_3$ seien und $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasis bezeichne. Es ist also ein in Richtung seiner Hauptachsen gestreckter, im Raum gedrehter Oktaeder dessen Masse gleichmäßig in seinen sechs Eckpunkten konzentriert ist.

Hinweis: Verwende die Hauptachsentransformation und zeige, dass jedes Tupel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $(*)$ eine Linearkombination von $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ und $(1, 1, 0)$ mit nichtnegativen Koeffizienten ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 11. Juni, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.

[1] Dies ist für uns der Einfachheit halber eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, eine Menge von „normierten Punktmassen" die durch starre, masselose Stangen verbunden sind. Allgemeiner könnte dies auch durch einen geeigneten Begriff einer Dichtefunktion beschrieben werden.