Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Übungsblatt 10 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 42. Seien A und B Mengen. Verwende das Lemma von Zorn um zu zeigen, dass es eine injektive Abbildung $A \to B$ oder eine injektive Abbildung $B \to A$ gibt.

Aufgabe 43. Sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, sowie $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige:

(a) $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$

(b) $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$

Aufgabe 44. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige:

(a) Ist U ein Untervektorraum von V, so lässt sich jede Linearform $\varphi \in U^*$ auf V fortsetzen, d.h. es existiert $\widetilde{\varphi} \in V^*$ mit $\widetilde{\varphi}|_U = \varphi$.

(b) Ist V nicht endlichdimensional, so ist der kanonische Monomorphismus $V \to V^{**}$ nicht surjektiv.

Hinweis: Wähle eine Basis $(x_i)_{i \in I}$ von V und dazu $(x_i^*)_{i \in I} \subseteq V^*$ mit $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Finde geeignetes $\varphi \in U^*$ für $U = \mathrm{span}_K(x_i^*)_{i \in I} \subseteq V^*$ und setze zu $\widetilde{\varphi} \in V^{**}$ fort.

Aufgabe 45. Seien A, B, C Mengen, K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für $f \in \mathrm{Abb}(A \times B, C)$ und $a \in A$ in schreiben wir $f(a, \cdot)$ für die Abbildung

$$\begin{aligned} B &\to C \\ b &\mapsto f(a, b) \end{aligned}$$

Zeige:

(a) Durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(A \times B, C) &\to \mathrm{Abb}(A, \mathrm{Abb}(B, C)) \\ f &\mapsto (a \mapsto f(a, \cdot)) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion gegeben ist.

(b) Die Menge $\mathrm{Bil}_K(V, V; K)$ der Bilinearformen auf V ist ein Untervektorraum des K-Vektorraumes $\mathrm{Abb}(V \times V, K)$.

(c) Für $C = K$ und $A = B = V$ schränkt sich obige Bijektion zu einem Isomorphismus

$$\mathrm{Bil}_K(V, V; K) \to \mathrm{Hom}_K(V, V^*)$$

ein.

Zusatzaufgabe 46. Zu $a, b \in \mathbb{R}$ sei $I_a^b : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$I_a^b(P) = \int_a^b P(t)dt$$

Außerdem bezeichne $\mathrm{ev}_a \colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}, P \mapsto P(a)$ die Auswertungsabbildung in a und $\frac{d}{dt} \colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ den Ableitungsoperator. Zeige:

(a) $\frac{d}{dt} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[t])$ und ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $I_a^b \in \mathbb{R}[t]^*$ und es gilt[1]

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^* (I_a^b) = \mathrm{ev}_b - \mathrm{ev}_a$$

Seien ab jetzt $V := \mathbb{R}[t]_{\leq n}$ und obige Abbildungen auf V eingeschränkt. Seien $x, x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und für $i \in \{0, \ldots, n\}$ sei $\varphi_i \colon V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi_i(P) := P^{(i)}(x)$$

wobei $P^{(i)} := \left(\frac{d}{dt}\right)^i P$ die i-te Ableitung von P bezeichne.

(c) Zeige dass $(\mathrm{ev}_{x_0}, \ldots, \mathrm{ev}_{x_n})$, $(I_x^{x_0}, \ldots, I_x^{x_n})$ und $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ jeweils Basen von V^* sind.

(d) Gib explizit die dualen Basen zu $(\mathrm{ev}_{x_0}, \ldots, \mathrm{ev}_{x_n})$ und $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ von V an. Dabei identifizieren wir V mit V^{**} mittels des kanonischen Isomorphismus.

Abgabe bis Donnerstag, den 18. Juni, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.

[1] nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung