Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 11 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 49. Sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ selbstadjungiert. Zeige, dass f und g genau dann kommutieren, wenn sie *simultan orthogonal diagonalisierbar sind*[1], d.h. wenn es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V gibt, deren Elemente sowohl Eigenvektoren von f als auch von g sind.

Lösungsvorschlag: Die einfachere Richtung wurde bereits in Aufgabe 13 gezeigt. Auch der Beweis der anderen Richtung ist ähnlich. Sei nun $fg = gf$. Da g selbstadjungiert ist, wissen wir nach VI.6.7, dass V die orthogonale Summe der Eigenräume von g ist. Diese sind f-invariant, da f und g kommutieren. Da für $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $f_\lambda := f|_{\mathrm{Eig}(\lambda,g)}$ selbstadjungiert ist, können wir jeweils eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_\lambda$ von $\mathrm{Eig}(\lambda, g)$ aus Eigenvektoren von f_λ wählen. Damit ist wie gewünscht $\bigcup_\lambda \mathcal{B}_\lambda$ eine Orthonormalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren von f und g.

[1] Vergleiche Aufgabe 13