Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Übungsblatt 12 zur Linearen Algebra II

Im folgenden seien K ein Körper und V, W K-Vektorräume.

Aufgabe 52. (Tensorprodukte von Spalten- mit Zeilenvektoren sind Matrizen) Sei $\mu\colon \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K) \times \mathrm{Mat}_{1\times n}(K) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ gegeben durch die Matrixmultiplikation, welche bekanntlich K-bilinear ist. Zeige dass der durch die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gegebene Homomorphismus

$$\mu_\otimes\colon\ \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K) \otimes_K \mathrm{Mat}_{1\times n}(K) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$$

ein Isomorphismus ist. (Vgl. Beispiel VII 6.12)

Aufgabe 53. (Aufgabe 52 nochmal abstrakt)

(a) Zeige dass die Abbildung $\zeta\colon W \times V^* \to \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gegeben durch

$$(w, \varphi) \mapsto (v \mapsto \varphi(v)w)$$

K-bilinear ist.

(b) Zeige, dass der durch die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gegebene Homomorphismus

$$\zeta_\otimes\colon W \otimes_K V^* \to \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

ein Isomorphismus ist, falls V und W endlichdimensional sind.

(c) Zeige, dass $\zeta_\otimes$ injektiv ist, auch ohne die Annahme, dass V und W endlichdimensional sind.

Hinweis: Sei für $T \in \mathrm{Ker}\,\zeta_\otimes$ eine Darstellung $T = \sum_{i=1}^n w_i \otimes \varphi_i$ mit n minimal gegeben. Ist $n > 0$ so gibt es $v \in V$ mit $\varphi_n(v) \neq 0$. Zeige, dass man wegen $\sum_i \varphi_i(v)w_i = 0$ eine kürzere Darstellung bekommt.

Aufgabe 54. (Basisfreie Konstruktion des Tensorproduktes) Zeige, dass das in Bemerkung VII 6.16 definierte Paar (T, τ) ein Tensorprodukt von V und W ist.

Hinweis: Definiere Homomorphismen zunächst auf T_1 und wende dann den Homomorphiesatz auf T_1/T_0 an.

Aufgabe 55. Sei p eine Primzahl. Wir betrachten die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeige:

(a) Jede maximal linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{Z}$ und von $\mathbb{Q}$ ist einelementig.

(b) Gib ein Beispiel für eine maximal linear unabhänge Teilmenge von $\mathbb{Z}$ an, die nicht erzeugend ist.

(c) Gib ein Beispiel für ein minimales Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}$ an, das linear abhängig ist.

(d) Jedes Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}$ ist unendlich. (**Hinweis**: Hauptnenner)

(e) Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist linear abhängig.

(f) Jedes von Null verschiedene Element von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist erzeugend.

Zusatzaufgabe 56. Sei V endlichdimensional und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Wir betrachten V als $K[t]$-Modul mittles

$$P \cdot v := P(f)v$$

für $P \in K[t]$ und $v \in V$. Zeige

(a) U ist genau dann ein f-invarianter K-Untervektorraum, wenn es ein $K[t]$-Untermodul ist.

(b) f ist genau dann diagonalisierbar, wenn V die direkte Summe von $K[t]$-Untermoduln ist, welche über K eindimensional sind.

(c) V besteht ausschließlich aus Torsionselementen.

(d) Zerfällt das charakteristische Polynom von f in lauter verschiedene Linearfaktoren, so ist V *zyklisch*, d.h. von einem Element erzeugt.

Abgabe bis Donnerstag, den 2. Juli, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.