**Universität Konstanz** Arno Fehm
**Fachbereich Mathematik und Statistik** Christoph Hanselka
**Sommersemester 2015**

# Übungsblatt 13 zur Linearen Algebra II

**Aufgabe 57.** (Universelle Eigenschaft der direkten Summe und des direkten Produkts) Sei $R$ ein kommutativer Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln. Sei $P := \prod_{i\in I} M_i$ das *direkte Produkt* der $M_i$, d.h. der $R$-Modul bestehend aus dem kartesischen Produkt der Mengen $M_i$, ausgestattet mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation. Bezeichne jeweils $\pi_i \colon P \to M_i$ die Projektion auf die $i$-te Komponente. Sei weiter $S := \bigoplus_{i\in I} M_i$ die direkte Summe der $M_i$ und jeweils $\iota_i \colon M_i \to S$ die kanonische Einbettung, d.h. für $x \in M_i$ ist $\iota_i(x) = (x_j)_{j\in I}$, wobei $x_j = x$ für $j = i$ und $x_j = 0$ sonst. Zeige:

(a) $(S, (\iota_i)_{i\in I})$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist $N$ ein weiterer $R$-Modul und $g_i \in \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$ für $i \in I$, so gibt es genau ein $g \in \mathrm{Hom}_R(S, N)$ mit $g_i = g \circ \iota_i$ für alle $i \in I$.

(b) Zeige, dass $(S, (\iota_i)_i)$ durch diese universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt ist, d.h. erfüllt $(S', (\iota'_i)_{i\in I})$ auch diese Eigenschaft, so gibt es genau einen Isomorphismus $\theta \in \mathrm{Hom}_R(S, S')$ mit $\iota'_i = \theta \circ \iota_i$ für alle $i \in I$. (Vgl. VII.6.7)

(c) **(2 Zusatzpunkte)** Formuliere und beweise eine analoge universelle Eigenschaft für $(P, (\pi_i)_{i\in I})$, sowie die daraus resultierende Eindeutigkeit.

**Hinweis:** Drehe bei der universellen Eigenschaft aus (a) alle Pfeile um, d.h. vertausche jeweils Definitions- und Zielbereich.

**Aufgabe 58.** Entscheide ob $\overline{2} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ irreduzibel bzw. prim ist.

**Aufgabe 59.** (Quadratische Ringerweiterungen) Sei $R$ ein Teilring von $\mathbb{C}$ (mit Eins) und $\alpha \in \mathbb{C} \setminus R$ mit $\alpha^2 \in R$. Es bezeichne

$$R[\alpha] := \bigcap \{ S \mid S \subseteq \mathbb{C} \text{ Teilring}, R \subseteq S,\ \alpha \in S \}$$

den kleinsten Teilring von $\mathbb{C}$, der $R$ und $\alpha$ umfasst. Zeige:

(a) $R[\alpha] = \{ a + b\alpha \mid a, b \in R \}$.

(b) Ist $R$ ein Körper, so auch $R[\alpha]$.

**Hinweis:** Betrachte $(a + b\alpha)(a - b\alpha)$ für $a, b \in R$.

**Aufgabe 60.** Zeige, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]$ euklidisch ist.

**Hinweis:** Betrachte $\delta\colon \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \overline{x}x$ als Gradfunktion und nähere Elemente aus $\mathbb{Q}[i]$ durch Elemente aus $\mathbb{Z}[i]$ an.

**Zusatzaufgabe 61.** Betrachte den Teilring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ von $\mathbb{C}$ und setze $N(x) := \overline{x}x \in \mathbb{Z}$ für $x \in R$. Zeige:

(a) $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in R$.

(b) $R^\times = \{-1, 1\}$

(c) 2 und $1 + \sqrt{-5}$ sind in $R$ irreduzibel.

(d) 2 und $1 + \sqrt{-5}$ sind in $R$ nicht prim.

**Hinweis zu (b)-(d):** Verwende jeweils (a)

**Abgabe** bis Donnerstag, den 9. Juli, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.