Universität Konstanz Arno Fehm
Fachbereich Mathematik und Statistik Christoph Hanselka
Sommersemester 2015

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 13 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 57. (Universelle Eigenschaft der direkten Summe und des direkten Produkts) Sei R ein kommutativer Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Sei $P := \prod_{i\in I} M_i$ das *direkte Produkt* der M_i, d.h. der R-Modul bestehend aus dem kartesischen Produkt der Mengen M_i, ausgestattet mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation. Bezeichne jeweils $\pi_i \colon P \to M_i$ die Projektion auf die i-te Komponente. Sei weiter $S := \bigoplus_{i\in I} M_i$ die direkte Summe der M_i und jeweils $\iota_i \colon M_i \to S$ die kanonische Einbettung, d.h. für $x \in M_i$ ist $\iota_i(x) = (x_j)_{j\in I}$, wobei $x_j = x$ für $j = i$ und $x_j = 0$ sonst. Zeige:

(a) $(S, (\iota_i)_{i\in I})$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist N ein weiterer R-Modul und $g_i \in \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$ für $i \in I$, so gibt es genau ein $g \in \mathrm{Hom}_R(S, N)$ mit $g_i = g \circ \iota_i$ für alle $i \in I$.

(b) Zeige, dass $(S, (\iota_i)_i)$ durch diese universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt ist, d.h. erfüllt $(S', (\iota'_i)_{i\in I})$ auch diese Eigenschaft, so gibt es genau einen Isomorphismus $\theta \in \mathrm{Hom}_R(S, S')$ mit $\iota'_i = \theta \circ \iota_i$ für alle $i \in I$. (Vgl. VII.6.7)

(c) **(2 Zusatzpunkte)** Formuliere und beweise eine analoge universelle Eigenschaft für $(P, (\pi_i)_{i\in I})$, sowie die daraus resultierende Eindeutigkeit.

Hinweis: Drehe bei der universellen Eigenschaft aus (a) alle Pfeile um, d.h. vertausche jeweils Definitions- und Zielbereich.

Lösungsvorschlag: (a) Sei N ein weiterer R-Modul und $g_i \in \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$ für $i \in I$. Per Definition hat jedes Element $a \in S$ eine eindeutige Darstellung der Form $a = \sum_{i\in I} \iota_i(a_i)$, wobei $a_i \in I_i$ fast alle Null. Betrachten wir

$$g(a) = g\left(\sum_{i\in I} \iota_i(a_i)\right) = \sum_{i\in I} (g \circ \iota_i)(a_i) \stackrel{!}{=} \sum_{i\in I} g_i(a_i)$$

so folgt sofort, dass die Bedingung $g_i = g \circ \iota_i$ für $i \in I$ einen Homomorphismus $g \colon S \to N$ eindeutig festlegt, sofern er existiert. Die Existenz eines solchen folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung von a.

(b) Sei $(S', (\iota'_i)_{i\in I})$ ein weiteres Paar, das diese universelle Eigenschaft erfüllt. Dann existiert aufgrund der universellen Eigenschaft von S (genauer: von $(S, (\iota_i)_i)$) genau ein $\theta \in \mathrm{Hom}_R(S, S')$ mit $\iota'_i = \theta \circ \iota_i$ für alle $i \in I$. Aufgrund der universellen Eigenschaft von S' bekommen wir außerdem ein $\theta' \in \mathrm{Hom}_R(S', S)$ mit $\iota_i = \theta' \circ \iota'_i$ für alle $i \in I$. Wir zeigen, dass θ' invers zu θ ist und damit θ ein Isomorphismus. Da sowohl für $g = \mathrm{id}_S$ als auch für $g = \theta' \circ \theta$ gilt

$$\iota_i = g \circ \iota_i$$

bekommen wir aus der Eindeutigkeit bei der universellen Eigenschaft von S, dass $\mathrm{id}_S = \theta' \circ \theta$ gilt. Analog bekommen wir aus der universellen Eigenschaft von S', dass $\mathrm{id}_{S'} = \theta \circ \theta'$.

(c) $(P, (\pi_i)_{i \in I})$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist M ein weiterer R-Modul und $f_i \in \mathrm{Hom}_R(M, M_i)$ für $i \in I$, so gibt es genau ein $f \in \mathrm{Hom}_R(M, P)$ mit $f_i = \pi_i \circ f$ für alle $i \in I$.

Sei nämlich M ein R-Modul und $f_i \in \mathrm{Hom}_R(M, M_i)$ für $i \in I$. Wir definieren den Homomorphismus $f\colon M \to P$ durch

$$f(a) := (f_i(a))_{i \in I}$$

für $a \in M$. Dann ist $\pi_i(f(a)) = f_i(a)$, also $\pi_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$. Da Elemente aus P durch ihre Komponenten bestimmt sind, folgt auch sofort die Eindeutigkeit der Abbildung f mit dieser Eigenschaft.

Dass $(P, (\pi_i)_{i \in I})$ durch diese universelle Eigenschaft eindeutig bestimmt ist, folgt völlig analog zu (b).