
Einführung in die Algebra, Übungsblatt 5, Lösungsvorschlag

Aufgabe 2. Es bezeichne $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ die Gruppe der \mathbb{R} -linearen Ringautomorphismen von \mathbb{H} . Zeige:

- (a) $\mathbb{R}^3 = \{a \in \mathbb{H} \mid a^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$
- (b) Jeder \mathbb{R} -lineare Ringendomorphismus von \mathbb{H} liegt in $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$, bildet \mathbb{R}^3 auf \mathbb{R}^3 ab und erhält die Norm auf \mathbb{R}^3 .
- (c) $\Phi: \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{SO}_3$, $\varphi \mapsto \varphi|_{\mathbb{R}^3}$ ist ein Isomorphismus, wobei wir einen Vektorraumendomorphismus des \mathbb{R}^3 mit seiner Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis identifizieren.
- (d) $\iota: \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}^\times)$, $\varphi \mapsto \varphi|_{\mathbb{H}^\times}$ ist eine Einbettung.
- (e) $\text{Inn}(\mathbb{H}^\times) \subseteq \iota(\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}))$.
- (f) Wir haben einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Inn}(\mathbb{H}^\times) &\rightarrow \text{Inn}(\mathbb{H}^\times / \mathbb{R}^\times) \\ c_a &\mapsto c_{\bar{a}} \end{aligned}$$

und für $a, h \in \mathbb{H}^\times$ ist $c_{\bar{a}}(\bar{h}) = \overline{aha^*}$.

Lösungsvorschlag. Im folgenden benutzen wir öfters, dass nach 1(b) für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$v^2 = \underbrace{v \times v}_{=0} - \langle v, v \rangle = -\|v\|^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}.$$

(a) Aus der eben gemachten Beobachtung folgt sofort „ \subseteq “. Um „ \supseteq “ zu zeigen, sei $a = r + v \in \mathbb{H}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^3$ und $a^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$. Zu zeigen ist $r = 0$. Da $\mathbb{R} \ni (r + v)^2 = r^2 + v^2 + 2rv$ ist $rv = 0$. Wäre $r \neq 0$, so müsste also $v = 0$ und damit $a^2 = r^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ sein im Widerspruch zu $a^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$. Also ist $r = 0$.

(b) Sei φ ein \mathbb{R} -linearer Ringendomorphismus von \mathbb{H} . Zu zeigen ist, dass $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ und dass für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt $\varphi(v) \in \mathbb{R}^3$ und $\|\varphi(v)\| = \|v\|$.

φ ist injektiv: Da $\varphi(1) = 1 \neq 0$ ist $\ker \varphi$ ein echtes Ideal des Schiefkörpers \mathbb{H} , muss also das Nullideal sein. Ist nämlich I ein Ideal von \mathbb{H} mit $0 \neq a \in I$ so ist $1 = a^{-1}a \in I$

und damit $I = \mathbb{H}$. Da φ \mathbb{R} -linear und \mathbb{H} ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum ist, ist φ aufgrund der Injektivität schon surjektiv, also $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\varphi(v)^2 = \varphi(v^2) = \varphi(-\|v\|^2) = -\|v\|^2 \varphi(1) = -\|v\|^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$$

und nach (a) ist deshalb $\varphi(v) \in \mathbb{R}^3$. Damit gilt auch $\|\varphi(v)\|^2 = -\varphi(v)^2 = \|v\|^2$.

(c) Nach (b) gilt für jedes $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$, dass $\varphi(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathbb{R}^3$ und wegen der Injektivität und der Linearität von φ sogar $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$. Daher ist Φ als Abbildung $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ wohldefiniert. Es gilt deshalb natürlich $(\varphi \circ \psi)|_{\mathbb{R}^3} = \varphi|_{\mathbb{R}^3} \circ \psi|_{\mathbb{R}^3}$ für alle $\varphi, \psi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$, das heißt Φ ist ein Gruppenhomomorphismus. Sei $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$. Aufgrund der \mathbb{R} -Linearität und $\varphi(1) = 1$ ist $\varphi|_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Ist nun zusätzlich $\varphi|_{\mathbb{R}^3} = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ so ist $\varphi = \text{id}_{\mathbb{H}}$, was die Injektivität von Φ zeigt. Außerdem ist $\varphi|_{\mathbb{R}^3}$ nach (b) normerhaltend und damit $\varphi|_{\mathbb{R}^3} \in O_3$. Zu zeigen ist noch dass $\text{im } \Phi = \text{SO}_3$.

Hilfsbehauptung: SO_3 besteht genau aus den orientierungserhaltenden orthogonalen Matrizen, das heißt für $U \in O_3$ gilt genau dann $\det U = 1$, wenn für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ $Uv \times Uw = U(v \times w)$.¹

Begründung: Zunächst stellen wir fest, dass für $v, w, x \in \mathbb{R}^3$

$$\det(x \ v \ w) = \langle x, v \times w \rangle$$

wobei $(x \ v \ w)$ die Matrix mit den Spalten x, v und w ist. Dies sieht man unmittelbar durch Entwicklung nach der ersten Spalte. Sei nun $U \in O_3$, $\delta := \det U$ und v, w linear unabhängig und $x := v \times w \neq 0$.² Es gilt

$$\begin{aligned} \langle Ux, Uv \times Uw \rangle &= \det(Ux \ Uv \ Uw) = \det(U(x \ v \ w)) \\ &= \delta \det(x \ v \ w) = \delta \|x\|^2 = \delta \|Ux\|^2 \end{aligned} \quad (*)$$

Da außerdem $\langle Ux, Uv \rangle = \langle x, v \rangle = 0$ und ebenso $\langle Ux, Uw \rangle = 0$ sind Ux und $Uv \times Uw$ linear abhängig.³ Zusammen mit (*) ist somit $Ux = Uv \times Uw$ genau dann, wenn $\delta = 1$. Damit ist unsere Hilfsbehauptung gezeigt.

Ist nun $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$, so ist $\varphi|_{\mathbb{R}^3}$ nicht nur normerhaltend, sondern für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt wegen

$$\begin{aligned} \varphi(v) \times \varphi(w) - \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle &= \varphi(v)\varphi(w) = \varphi(vw) = \varphi(v \times w - \langle v, w \rangle) \\ &= \varphi(v \times w) - \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

und $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ (eine normerhaltende lineare Abbildung erhält bekanntlich auch das Skalarprodukt wegen der Polarisationsformel) auch $\varphi(v) \times \varphi(w) = v \times w$.

¹Siehe dazu auch <https://de.wikipedia.org/wiki/Kreuzprodukt> sowie <https://de.wikipedia.org/wiki/Drei-Finger-Regel>.

² v und w sind genau dann linear abhängig, wenn $v \times w = Uv \times Uw = 0$.

³ $\dim\{v, w\}^\perp = 1$

Also ist $\varphi|_{\mathbb{R}^3}$ auch kreuzprodukterhaltend und liegt damit nach der Hilfsbehauptung in SO_3 . Ist nun umgekehrt $U \in SO_3$, so ist durch

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ r + v &\mapsto r + Uv \quad (r \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3)\end{aligned}$$

ein \mathbb{R} -Vektorraumautomorphismus gegeben, der nach der umgekehrten Argumentation wie eben auch ein Ringhomomorphismus ist, für welchen offensichtlich gilt $\varphi|_{\mathbb{R}^3} = U$. Das zeigt, dass Φ surjektiv ist.

(d) Da für alle $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ gilt, dass $\varphi(\mathbb{H}^\times) = \mathbb{H}^\times$, ist ι ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Da außerdem für alle $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ gilt dass $\varphi(0) = 0$ und $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$, ist ι zudem injektiv.

(e) Sei $a \in \mathbb{H}^\times$. Wir definieren

$$\begin{aligned}\tilde{c}_a: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ x &\mapsto axa^{-1}\end{aligned}$$

Dann ist \tilde{c}_a wie man leicht sieht ein \mathbb{R} -linearer Ringautomorphismus, liegt also in $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ und offensichtlich ist $\iota(\tilde{c}_a) = c_a$.

(f) Es ist leicht zu sehen, dass die Abbildung, nennen wir sie γ , wohldefiniert ist. Sind nämlich $a, b \in \mathbb{H}^\times$ mit $c_a = c_b$, d.h. für alle $h \in \mathbb{H}^\times$ gilt $aha^{-1} = bhb^{-1}$ so gilt offenbar auch für jedes $\bar{h} \in \mathbb{H}^\times / \mathbb{R}^\times$, dass $\overline{a\bar{h}a^{-1}} = \overline{aha^{-1}} = \overline{bhb^{-1}} = \overline{b\bar{h}b^{-1}}$, also $c_{\bar{a}} = c_{\bar{b}}$. Ebenso leicht sieht man die Homomorphie. Sind nämlich $a, b \in \mathbb{H}^\times$, so ist

$$\gamma(c_a \circ c_b) = \gamma(c_{ab}) = c_{\overline{ab}} = c_{\bar{a}} \circ c_{\bar{b}} = \gamma(c_a) \circ \gamma(c_b).$$

Noch offensichtlicher ist die Surjektivität. Um die Injektivität zu zeigen, sei nun $a \in \mathbb{H}^\times$ mit $\gamma(c_a) = \text{id}_{\mathbb{H}^\times / \mathbb{R}^\times}$. Zu zeigen ist, dass $c_a = \text{id}_{\mathbb{H}^\times}$ ist, was gleichbedeutend damit ist, dass a im Zentrum von \mathbb{H}^\times liegt. Sei nun $v \in \mathbb{R}^3$ und $h := 1 + v$. Da nach Voraussetzung

$$\bar{h} = c_{\bar{a}}(\bar{h}) = \overline{c_a(h)}$$

gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ mit $\lambda h = c_a(h)$. Dann ist aber

$$\lambda + \lambda v = \lambda h = c_a(h) = c_a(1 + v) = 1 + c_a(v)$$

also $\lambda = 1$ und somit auch $c_a(v) = v$. Dann ist also $c_a|_{\mathbb{R}^3} = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ und damit schon $c_a = \text{id}_{\mathbb{H}}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte.

- (a) Es ist $c_a \in \text{Inn}(\mathbb{H}^\times)$ mittels $\Phi \circ \iota^{-1}$ als Rotation im \mathbb{R}^3 an der Drehachse $\mathbb{R}v$ um den Winkel $2 \arg(r + i \|v\|)$ gegen den Uhrzeigersinn aufgefasst werden kann. Dabei sei die Uhr im Nullpunkt zentriert, senkrecht zu v stehend und das Ziffernblatt sei dem Vektor v zugewandt.⁴

Für $c = |c|e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$ sei dabei $\arg(c) := \alpha$ das *Argument* von c .

Hinweis: Argumentiere, warum man ohne Einschränkung $\|v\| = 1$ und dann mit Aufgabe 2(c) sogar $v = i$ annehmen kann. Berechne $c_a(i)$, $c_a(j)$ und $c_a(k)$ und vergleiche dies mit der Multiplikation in der komplexen Zahlenebene. Beachte dabei dass $xj + yk = (x + yi)j$ ist.

- (b) Benutze (a) und Aufgabe 2(c), um $\text{Inn}(\mathbb{H}^\times) = \iota(\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}))$ zu zeigen. Dies ist ein geometrischer Beweis des *Satzes von Skolem-Noether* für den Spezialfall von Quaternionen.
- (c) Überlege oder recherchiere, warum (a) und (b) sowie Aufgabe 2(f) zum Beispiel in der 3D-Programmierung, von Nutzen sein kann.

Lösungsvorschlag. Wir führen folgende Sprechweise ein: Für $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bezeichnen wir die Drehung im \mathbb{R}^3 an der Drehachse $\mathbb{R}v$ um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ gegen den Uhrzeigersinn mit einer im Nullpunkt zentrierten senkrecht zu v stehenden Uhr, deren Ziffernblatt dem Vektor v zugewandt ist, einfach eine Drehung um den Winkel α am Vektor v .

- (a) Es ist $R_a := (\Phi \circ \iota^{-1})(c_a)$ gegeben durch

$$R_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$w \mapsto awa^{-1} = \frac{awa^*}{\|a\|^2}.$$

Wir nehmen nun zunächst an, dass $v = i$ gilt und führen den allgemeinen Fall später darauf zurück. Es ist dann $ai = ia$ und deshalb $R_a(i) = i$. Außerdem gilt

$$R_a(j) = aja^{-1} = \frac{(r+i)j(r-i)}{\|a\|^2} = \frac{(r+i)^2j}{\|a\|^2} = \left(\frac{a}{\|a\|}\right)^2 j$$

und analog bekommen wir

$$R_a k = \left(\frac{a}{\|a\|}\right)^2 k.$$

⁴Siehe auch <https://de.wikipedia.org/wiki/Korkenzieherregel>.

Identifizieren wir nun in kanonischer Weise $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$ mit $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \subseteq \mathbb{H}$ als Körper und als \mathbb{R} -Vektorraum mit reellem Skalarprodukt, so bekommen wir mittels

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}j \\ c &\mapsto cj \end{aligned}$$

einen Isomorphismus der euklidischen Vektorräume \mathbb{C} und $\mathbb{C}j = \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$. Und da nach dem eben gezeigten

$$R_a(f(x + yi)) = R_a(xj + yk) = \left(\frac{a}{\|a\|}\right)^2 (xj + yk) = f\left(\left(\frac{a}{\|a\|}\right)^2 (x + yi)\right)$$

gilt, ist $f^{-1} \circ R_a \circ f$ durch Multiplikation mit der normierten komplexen Zahl $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)^2$ gegeben, welches einer Drehung in der komplexen Ebene gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel

$$\arg\left(\left(\frac{a}{\|a\|}\right)^2\right) \stackrel{(*)}{=} 2 \arg\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = 2 \arg(a) = 2 \arg(r + i) = 2 \arg(r + i\|v\|)$$

entspricht.⁵ Der Isomorphismus f identifiziert dabei die komplexe Ebene mit $\mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ derart, dass i senkrecht nach oben heraussteht.⁶ Das sichtbar auf \mathbb{C} liegende Ziffernblatt ist also nach Anwenden von f dem Vektor i zugewandt. Das zeigt also den Fall $v = i$.

Nun zeigen wir, warum wir zunächst $\|v\| = 1$ annehmen können. Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $c_a = c_{\lambda a}$ und $\arg(\lambda r + i\|\lambda v\|) = \arg(\lambda(r + i\|v\|)) = \arg(r + i\|v\|)$ sowie $\mathbb{R}v = \mathbb{R}\lambda v$. Außerdem ist auch die Orientierung der Uhr bezüglich v und λv dieselbe. Für $\lambda := \|v\|^{-1}$ zeigt dies also, dass ohne Einschränkung $\|v\| = 1$ angenommen werden darf.

Da nun $\|v\| = 1$ können wir $U \in \text{SO}_3$ mit $Uv = i$ wählen.⁷ Wir setzen nun $\varphi := \Phi^{-1}(U) \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$. Dann ist $\varphi(a) = r + Uv = r + i$. Definieren wir wie oben $R_{\varphi(a)} := (\Phi \circ \iota^{-1})(c_{\varphi(a)})$ so bekommen wir für $w \in \mathbb{R}^3$

$$R_{\varphi(a)}(w) = \varphi(a)w\varphi(a)^{-1} = \varphi(a\varphi^{-1}(w)a^{-1}) = (\varphi \circ R_a \circ \varphi^{-1})(w) = UR_a(U^{-1}w).$$

Nach dem vorhin Gezeigten ist $R_{\varphi(a)}$ die Drehung um den Winkel $2 \arg(r + i)$ am Vektor i . Damit ist also $R_a = U^{-1}R_{\varphi(a)}U$ Drehung um denselben Winkel

$$2 \arg(r + i) = 2 \arg(r + i\|v\|)$$

⁵Bei (*) gilt tatsächlich Gleichheit, nicht nur modulo 2π , da der Imaginärteil von a und damit auch von $\frac{a}{\|a\|}$ positiv ist. Also $\arg\left(\frac{a}{\|a\|}\right) < \pi$.

⁶Beachte etwa die Drei-Finger-Regel: Daumen \times Zeigefinger = Mittelfinger entspricht $j \times k = i$.

⁷Sei etwa v die erste Zeile von U und ergänze zu einer Orthonormalbasis. Vertausche dann ggf. die anderen beiden Zeilen um Determinante 1 zu bekommen.

am Vektor $U^{-1}i = v$.

Kurz zusammengefasst können wir es so formulieren, dass wir \mathbb{R}^3 so drehen können, dass $v = i$ gilt und dabei nach 2(c) die algebraische Struktur von \mathbb{H} nicht ändern.

(b) Wir zeigen zunächst, dass jedes Element $U \in SO_3$ eine Drehung um eine Achse ist. Als erstes sehen wir, dass U den Eigenwert 1 hat: Das charakteristische Polynom von U hat Grad 3 und somit eine reelle Nullstelle, d.h. U hat einen reellen Eigenwert welcher entweder 1 oder -1 ist, da $U \in O_3$. Ist er -1 sei dazu w ein Eigenvektor. Es ist $W := w^\perp \cong \mathbb{R}^2$ invariant unter U und $U|_W \in O_2$. Da $1 = \det U = (-1) \cdot \det U|_W$ ist $\det U|_W$ eine Drehspiegelung und besitzt somit einen Fixpunkt, d.h. den Eigenwert 1, welcher auch ein Eigenwert von U ist. Sei also nun v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wieder ist $V := v^\perp$ invariant und nun $U|_V \in SO_2$, also eine Drehung in der Ebene V . Das bedeutet, dass U eine Drehung an der Achse $\mathbb{R}v$ ist.

Sei nun $\text{id}_{\mathbb{H}} \neq \varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$. Dann gibt es also ein $v \in S^3$ derart, dass $U := \Phi(\varphi) \in SO_3$ eine Drehung an v um den Winkel 2α ist, wobei $\alpha \in (0, \pi)$. Setzen wir $a = \cos \alpha + (\sin \alpha)v$, so ist $\alpha = \arg(e^{i\alpha}) = \arg(\cos \alpha + i\|(\sin \alpha)v\|)$. Nach (a) gilt also $\Phi(\varphi) = U = \Phi(\iota(c_a))$, also $\varphi = \iota(c_a)$. Beachte, dass hier $\sin \alpha \neq 0$ einging.

(c) Es sollen hier nur ein paar Aspekte skizziert werden, die hoffentlich verdeutlichen, dass Quaternionen nicht nur ein für die Algebra interessantes abstraktes Konstrukt, sondern ebenso wie die komplexen Zahlen in der Anwendung von ganz konkretem Nutzen sind. Das Beispiel 3D-Programmierung eignet sich hierfür besonders gut, da dies sowohl ein sehr anschaulicher Bereich ist, und gleichzeitig weit über die Spieleentwicklung hinaus auch wichtige Anwendung findet, wie etwa in der Robotik, Luftfahrt, Raumfahrt uvm.

Die beiden Aufgaben (a) und (b) zeigen, dass wir mittels Quaternionen Drehungen im dreidimensionalen Raum beschreiben können. Aus rechentechnischer Sicht ergeben sich dabei z.B. folgende Vorteile

- Eine Quaternion wird durch nur 4 reelle Zahlen beschrieben, eine orthogonale 3×3 Matrix hingegen durch 9.
- Da $c_{ab} = c_a \circ c_b$ für alle $a, b \in \mathbb{H}$, ist die Verkettung von Drehungen durch das Produkt der zugehörigen Quaternionen beschrieben. Multiplikation zweier Quaternionen benötigt weniger Rechenoperationen als Multiplikation zweier Matrizen.
- Beim numerischen Multiplizieren vieler Quaternionen häufen sich auf dem Rechner Ungenauigkeiten in der Berechnung an. Das Ergebnis beschreibt immerhin trotzdem wieder eine Drehung. Beim numerischen Multiplizieren von orthogonalen Matrizen, kann das Ergebnis hingegen weit davon entfernt sein, wieder eine orthogonale Matrix zu sein.
- Die Tatsache, dass $c_a = c_{\lambda a}$ für $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ kann bei der Berechnung von Quaternionen hilfreich sein, da nicht skaliert werden muss (möglicherweise durch eine verhältnismäßig aufwendig berechnete Wurzel von a^*a).

- Gegenüber einer anderen üblicherweise verwendeten Beschreibung von Drehungen, den sogenannten eulerschen Winkeln gibt es bei Quaternionen keine „Singularitäten“ wie die kardalische Blockade.⁸
- Sind zwei Orientierungen eines Objektes im Raum gegeben, so kann mithilfe des SLERP⁹ ein flüssiger Übergang von der einen zur anderen animiert werden, in dem die Quaternionen interpoliert werden.
- Tatsächlich werden Quaternionen in der 3D-Grafikprogrammierung wie in Aufgabe 2(f) verwendet. Dabei können wir \mathbb{R}^3 (anders als bei Aufgabe 1 beschrieben) mittels $f : v \mapsto \overline{1 + v}$ in $\mathbb{H}^\times / \mathbb{R}^\times$ eingebettet auffassen. Das Rechnen in $\mathbb{H}^\times / \mathbb{R}^\times$ ist aus mehrerlei Sicht einfacher. Z.B gilt dort wie in der Aufgabe gezeigt $\overline{axa^{-1}} = \overline{axa^*}$, d.h. wir sparen uns bei der Berechnung den Faktor $\frac{1}{\|a\|^2}$. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : \overline{r + v} \mapsto \frac{1}{r}v$ ist heutzutage in Grafikkarten festverdrahtet und wird am Ende aller geometrischen Berechnungen sowieso durchgeführt. Das Stichwort „homogene Koordinaten“ könnte bei einer Suche zu diesem Thema für Interessierte hilfreich sein.

Ein ganz anderer Aspekt, der allerdings mit den hier genannten wenig zu tun hat, ist die Verwendung von quaternionischer Fouriertransformation in der Bild- und Signalverarbeitung.

⁸http://de.wikipedia.org/wiki/Gimbal_Lock

⁹<https://en.wikipedia.org/wiki/Slerp> - Die ersten beiden dort aufgelisteten externen Links führen außerdem zu interessanten Artikel zum Thema Quaternionen.