Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Aufgabe 1.

(a) Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Standarddarstellung von S_n aus Beispiel 1.1.13 direkte Summe zweier irreduzibler Darstellungen ist.

(b) Bleibt (a) richtig, wenn man in 1.1.13 statt $\mathbb{C}$ einen beliebigen Körper betrachtet?

Aufgabe 2. (*Satz von Maschke* in beliebiger Charakterisik)
Sei K ein Körper, $p := \operatorname{char} K$ und G eine endliche Gruppe, deren Ordnung nicht durch p teilbar ist. Zeige, dass jede Darstellung von G auf einem K-Vektorraum vollständig reduzierbar ist.

Anleitung: Zeige, dass man eine Projektion auf einen G-invarianten Unterraum in geeigneter Weise „mitteln" kann, um eine G-invariante Projektion zu erhalten. Betrachte dann Kern und Bild der letzteren.

Aufgabe 3. Zeige, dass jede irreduzible Darstellung einer abelschen Gruppe auf einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper eindimensional ist.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe mit n Elementen. Man benutze die Notation von Übungsblatt 1.

(a) Bestimme die Menge $\widehat{G}$ aller Darstellungen $G \to \mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1)$.

(b) Zeige, dass sich der Gruppenhomomorphismus

$$G \to (\mathbb{C}^\times)^{\widehat{G}} \colon g \mapsto (\varrho \mapsto \varrho(g))$$

eindeutig zu einem $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus

$$F : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}^{\widehat{G}}$$

fortsetzen lässt.

(c) Finde Algebrenisomorphismen $(A, *) \to \mathbb{C}[G]$ und $(A, \cdot) \to \mathbb{C}^{\widehat{G}}$, die das folgende Diagramm kommutieren lassen:

$$\begin{tikzcd} (A,*) \arrow[r, "T"] \arrow[d] & (A,\cdot) \arrow[d] \\ \mathbb{C}[G] \arrow[r, "F"] & \mathbb{C}^{\widehat{G}} \end{tikzcd}$$

Abgabe bis Montag, den 19. November, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.