Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Aufgabe 1. Betrachte die 8-elementige Diedergruppe D_4.

(a) Gebe irreduzible unitäre Matrizendarstellungen von D_4 an so, dass jede irreduzible Darstellung der D_4 zu genau einer dieser isomorph ist.

(b) Rechne in diesem Beispiel direkt nach, dass die Matrixkoeffizienten der Darstellungen aus (a) eine Orthogonalbasis von $L(D_4)$ bilden.

Aufgabe 2. Sei $\varrho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung der Gruppe G auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $V \neq 0$ und betrachte

$$A := \sum_{g\in G} \mathbb{C}\varrho_g \subseteq \mathrm{End}(V).$$

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) ϱ ist irreduzibel

(b) $\forall v, w \in V \setminus \{0\} : \exists f \in A : f(v) = w$

(c) $A = \mathrm{End}(V)$

Anleitung: Man zeige (b) $\Longrightarrow$ (c) für beliebige multiplikativ abgeschlossene Unterräume $A \subseteq \mathrm{End}(V)$ durch Induktion nach $\dim V$, wobei man im Induktionsschritt wie folgt vorgehen kann:

(1) Zeige, dass $B_f := \{f \circ g|_{\mathrm{im}\, f} \mid g \in A\}$ für jedes $f \in A$ ein multiplikativ abgeschlossener Unterraum von $\mathrm{End}(\mathrm{im}\, f)$ ist.

(2) Zeige mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung $B_f = \mathrm{End}(\mathrm{im}\, f)$ für alle $f \in A$ mit $\dim(\mathrm{im}\, f) < \dim V$.

(3) Wähle $f \in A\setminus\{0\}$ mit kleinstmöglicher Dimension von $W := \mathrm{im}\, f$ und setze $B := B_f$.

(4) Zeige unter Ausnutzung von $B = \mathrm{End}(W)$, dass die Annahme $\dim W \geq 2$ im Widerspruch zur Wahl von f steht.

(5) Zeige, dass man $w \in V$ und $\varphi \in V^*$ wählen kann mit $f(v) = \varphi(v)w$ für alle $v \in V$.

(6) Zeige mit der Voraussetzung (b), dass $\{v \in V \mid \forall g \in A : \varphi(g(v)) = 0\} = \{0\}$.

(7) Folgere $V^* = \{\varphi \circ g \mid g \in A\}$.

(8) Zeige, dass A alle Endomorphismen von V mit eindimensionalem Bild enthält.

Abgabe bis Montag, den 3. Dezember, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.