
Übungsblatt 5 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring. Für $I \subseteq R$ definieren wir

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{spec } R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

- (a) Zeige, dass dies die abgeschlossenen Mengen einer Topologie sind, bezüglich welcher $\text{spec } R$ quasikompakt ist. Diese wird *Zariskitopologie* auf $\text{spec } R$ genannt.
- (b) Zeige $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ für $\mathfrak{p} \in \text{spec } R$.

Aufgabe 2. Seien $C|K$ eine Körpererweiterung, C algebraisch abgeschlossen, I ein Ideal von $K[X_1, \dots, X_n]$ und $V(I) \subseteq \mathbb{A}^n = C^n$ die zugehörige affine K -Varietät. Wir betrachten $A := K[X_1, \dots, X_n]/I$ als Ring und $V(I)$ als topologischen Raum mit der K -Zariskitopologie. Beweise die folgende Aussagen:

- (a) Man hat eine stetige Abbildung $\varphi: V(I) \rightarrow \text{spec } A$, $x \mapsto \{f \in A \mid f(x) = 0\}$.
- (b) Die offenen Mengen in $V(I)$ sind genau die Urbilder offener Mengen in $\text{spec } A$ unter φ .
- (c) Im Fall $K = C$ ist φ injektiv, womit φ wegen (b) eine Einbettung topologischer Räume ist.
- (d) $\varphi(V(I))$ liegt dicht in $\text{spec } A$.
- (e) $\varphi(V(I)) = \{\mathfrak{p} \in \text{spec } A \mid \dim(A/\mathfrak{p}) \leq \text{trdeg}(C|K)\}$
- (f) Ist $C|K$ algebraisch, so ist $\varphi(V) = (\text{spec } A)^{\max}$.
- (g) Ist $\dim V(I) \leq \text{trdeg}(C|K)$, so ist φ surjektiv.

Abgabe bis Dienstag, den 26. Juni, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .