Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

23. Oktober 2009

Analysis I
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Seien X, X' Mengen und $f : X \longrightarrow X'$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.

(ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subset X$.

(iii) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subset X$.

Aufgabe 1.2 Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(d) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

Aufgabe 1.3 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{\nu=1}^{n}(1 + \frac{1}{\nu}) = n + 1$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}(y + kx) = \frac{1}{2}(n+1)(2y + nx).$$

Aufgabe 1.4 Sei $X \neq \emptyset$ ein beliebige Menge und $R, S \subset X \times X$ transitive Relationen.

(a) Zeigen Sie, dass $R \cap S$ auch eine transitive Relation ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel für X, R und S, bei welchem $R \cup S$ keine transitive Relation ist.

Abgabetermin: Freitag 30. Oktober 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.