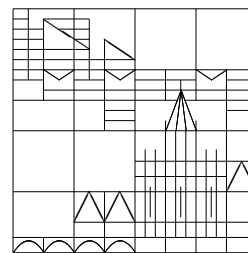


6. November 2009



Analysis I

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(X)$ die zugehörige Potenzmenge von X . Zeigen Sie, dass das übliche „ \subset “ eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(X)$ ist. Ist dann $\mathcal{P}(X)$ zusammen mit „ \subset “ vollständig geordnet?

Aufgabe 3.2 Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen die Menge der oberen Schranken S_o sowie die Menge der unteren Schranken S_u . Geben Sie dann das Infimum beziehungsweise Supremum an, falls es existiert.

- (i) $X_1 := \{x \in \mathbb{R} : \text{es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{2n}\}$
- (ii) $X_2 := \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x \leq 24\}$
- (iii) $X_3 := \left\{x \in \mathbb{R} : \text{es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n}\right\}$

Aufgabe 3.3 Beweisen Sie folgende Aussagen über komplexe Zahlen:

- (i) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- (ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ und $|z| = |\bar{z}|$.
- (iii) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine beliebige komplexe Zahl. Stellen Sie nun die Zahlen $z + (\bar{z})^{-1}$ und $\bar{z}^2 + \frac{1}{z^2}$ in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.
- (iv) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

Aufgabe 3.4

- (i) Zeigen Sie, dass das Intervall $(-1, 1)$ gleichmächtig zu \mathbb{R} ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass \mathbb{C} überabzählbar ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass eine unendliche Mengen M nie gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ sein kann.

HINWEIS: Zu (iii): Zeigen Sie, dass keine surjektive Abbildung $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ existieren kann, indem Sie die Menge $N := \{m \in M : m \notin f(m)\} \in \mathcal{P}(M)$ betrachten.