Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

6. November 2009

Analysis I
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Sei X eine beliebige Menge und $\mathscr{P}(X)$ die zugehörige Potenzmenge von X. Zeigen Sie, dass das übliche „$\subset$ "eine Halbordnung auf $\mathscr{P}(X)$ ist. Ist dann $\mathscr{P}(X)$ zusammen mit „$\subset$ "vollständig geordnet?

Aufgabe 3.2 Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen die Menge der oberen Schranken S_o sowie die Menge der unteren Schranken S_u. Geben Sie dann das Infimum beziehungsweise Supremum an, falls es existiert.

(i) $X_1 := \left\{x \in \mathbb{R} : \text{ es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{2n}\right\}$

(ii) $X_2 := \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x \leq 24\}$

(iii) $X_3 := \left\{x \in \mathbb{R} : \text{ es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n}\right\}$

Aufgabe 3.3 Beweisen Sie folgende Aussagen über komplexe Zahlen:

(i) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ und $|z| = |\overline{z}|$.

(iii) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine beliebige komplexe Zahl. Stellen Sie nun die Zahlen $z + (\overline{z})^{-1}$ und $\overline{z}^2 + \frac{1}{z^2}$ in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

(iv) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

Aufgabe 3.4

(i) Zeigen Sie, dass das Intervall $(-1, 1)$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ überabzählbar ist.

(iii) Zeigen Sie, dass eine unendliche Mengen M nie gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ sein kann.

Hinweis: Zu (iii): Zeigen Sie, dass keine surjektive Abbildung $f : M \to \mathscr{P}(M)$ existieren kann, indem Sie die Menge $N := \{m \in M : m \notin f(m)\} \in \mathscr{P}(M)$ betrachten.

Abgabetermin: Freitag 13. November 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.