Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

20. November 2009

Analysis I
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Glieder. Zeige, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie als Anwendung von (i), dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s > 1$ konvergiert und für $s \leq 1$ divergiert.

Aufgabe 5.2 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz beziehungsweise Divergenz:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|\alpha| < 1$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

(iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5.3

(i) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Cauchy-Produktreihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ divergent ist.

Aufgabe 5.4 Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

(i) $\sum\limits_{n=-2}^{\infty} \min(1,n)\frac{1}{|n|!}$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Hinweis: Stellen Sie die Folge der Partialsummen geschickt dar.

Abgabetermin: Freitag 27. November 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.