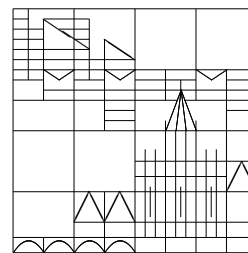


27. November 2009



## Analysis I 6. Übungsblatt

**Aufgabe 6.1** Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen

(i)  $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto |x_1| + |x_2|$

(ii)  $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$

(iii)  $\|\cdot\|_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \max\{|x_1|, |x_2|\}$

Normen sind und skizzieren Sie die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_k \leq 1\}$  für  $k = 1, 2, 3$ .

**Aufgabe 6.2**

(i) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass aus

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

bereits  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  folgt. Gibt es eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty?$$

(ii) Sei die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rekursiv definiert durch

$$a_1 := 0, \quad a_{2n} := \frac{1}{2}a_{2n-1}, \quad a_{2n+1} := \frac{1}{2} + a_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bestimmen Sie  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Aufgabe 6.3** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $x_0 \in M$ , sowie  $\varepsilon > 0$ . Zeigen Sie:

(i)  $M, \emptyset$  und  $B(x_0, \varepsilon) := \{x \in M : d(x_0, x) < \varepsilon\}$  sind offene Teilmengen von  $M$ .

(ii)  $M, \emptyset$  und  $K(x_0, \varepsilon) := \{x \in M : d(x_0, x) \leq \varepsilon\}$  sind abgeschlossene Teilmengen von  $M$ .

(iii) Gibt es eine Menge  $M$  und eine Metrik  $d$  so, dass Teilmengen von  $M$  existieren, die weder offen noch abgeschlossen sind?

(iv) Gibt es eine Menge  $M$  und eine Metrik  $d$  so, dass jede Teilmenge von  $M$  sowohl offen als auch abgeschlossen ist?

**Aufgabe 6.4** Zeigen Sie, dass jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  mindestens einen Häufungspunkt besitzen muss.

HINWEIS: Verwenden Sie dazu den Satz von Bolzano-Weierstraß aus der Vorlesung. Beachten Sie die unterschiedliche Definition eines Häufungspunktes für Mengen bzw. Folgen!