Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

27. November 2009

Analysis I
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen

(i) $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto |x_1| + |x_2|$

(ii) $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$

(iii) $\|\cdot\|_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \max\{|x_1|, |x_2|\}$

Normen sind und skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_k \leq 1\}$ für $k = 1, 2, 3$.

Aufgabe 6.2

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass aus

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

bereits $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt. Gibt es eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$?

(ii) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 := 0, \quad a_{2n} := \frac{1}{2} a_{2n-1}, \quad a_{2n+1} := \frac{1}{2} + a_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 6.3 Sei (M, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in M$, sowie $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

(i) M, $\emptyset$ und $B(x_0, \varepsilon) := \{x \in M : d(x_0, x) < \varepsilon\}$ sind offene Teilmengen von M.

(ii) M, $\emptyset$ und $K(x_0, \varepsilon) := \{x \in M : d(x_0, x) \leq \varepsilon\}$ sind abgeschlossene Teilmengen von M.

(iii) Gibt es eine Menge M und eine Metrik d so, dass Teilmengen von M existieren, die weder offen noch abgeschlossen sind?

(iv) Gibt es eine Menge M und eine Metrik d so, dass jede Teilmenge von M sowohl offen als auch abgeschlossen ist?

Aufgabe 6.4 Zeigen Sie, dass jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mindestens einen Häufungspunkt besitzen muss.

Hinweis: Verwenden Sie dazu den Satz von Bolzano-Weierstraß aus der Vorlesung. Beachten Sie die unterschiedliche Definition eines Häufungspunktes für Mengen bzw. Folgen!

Abgabetermin: Freitag 4. Dezember 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.