Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

4. Dezember 2009

Analysis I
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Beweisen Sie, dass die Menge $X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt ist.

Aufgabe 7.2 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) f ist stetig.

(ii) Für alle $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$.

(iii) Für alle offenen Mengen $U \subset Y$ ist auch $f^{-1}(U) \subset X$ offen.

Aufgabe 7.3

(i) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3}, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\} \\ a, & \text{falls } x = 1 \\ b, & \text{falls } x = 3. \end{cases}$$

Können $a, b \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist?

(ii) Sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2}, & \text{falls } x \notin \mathbb{N} \\ \frac{4x-6}{x+1}, & \text{falls } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Stellen an denen g stetig beziehungsweise unstetig ist.

Aufgabe 7.4

(i) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann schon $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in 0 stetige Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(x + y) \le f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann schon f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(iii) Zeigen Sie unter der Verwendung von (ii), dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Abgabetermin: Freitag 11. Dezember 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.